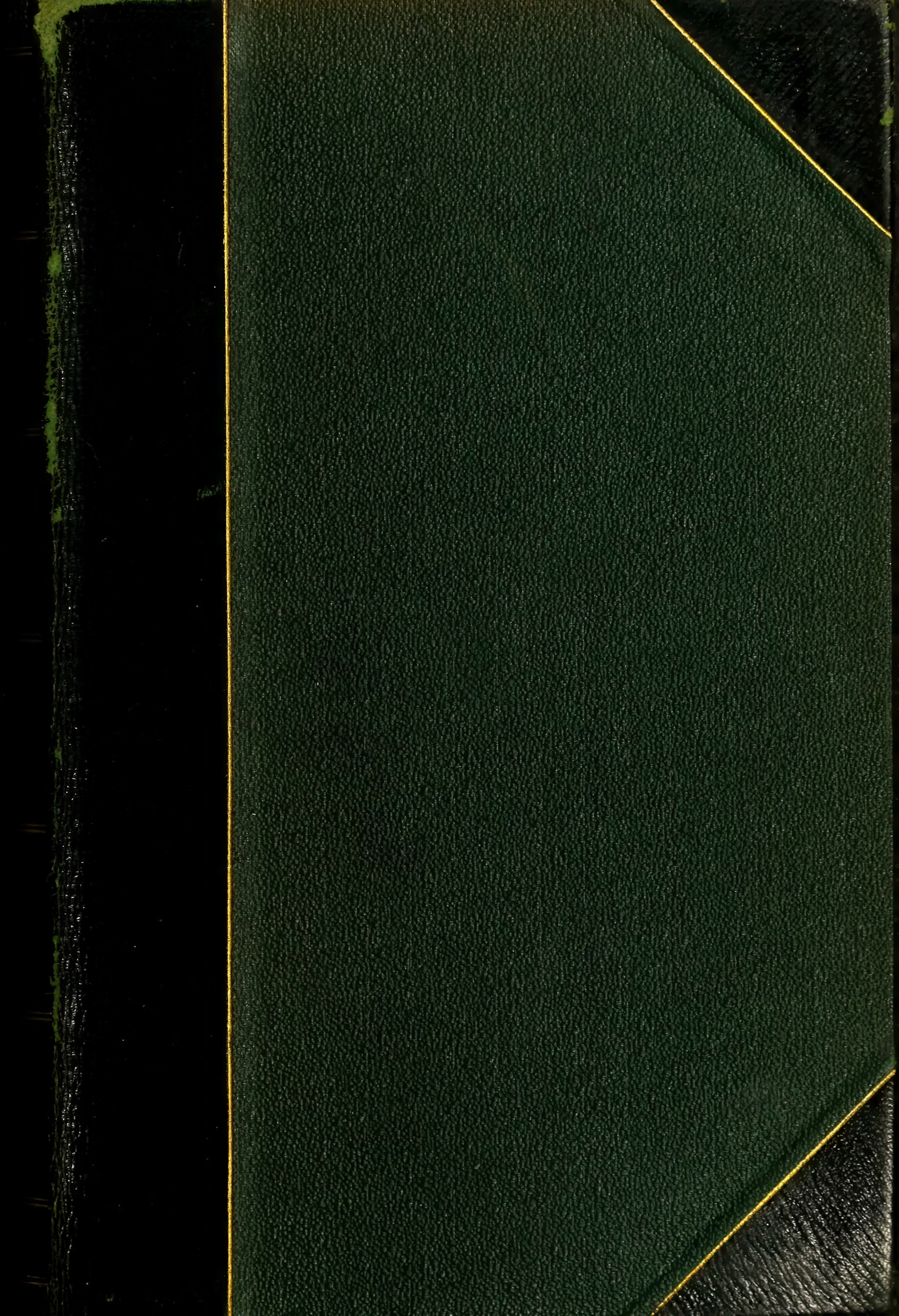


ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — **Fascicule 25.**

SUR LES
GROUPES DE MATRICES LINÉAIRES
NON INVERTIBLES,

PAR

LÉON AUTONNE,
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Professeur-Adjoint honoraire à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lyon.





LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
4, Rue Gentil

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55

1909

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

EN VENTE

A LYON	A PARIS
Chez A. REY, Imprimeur-Éditeur	**Chez les Libraires spéciaux**
4, RUE GENTIL	SUIVANTS

La mention en chiffres romains qui précède le numéro du fascicule indique, pour les ouvrages parus dans la Nouvelle Série, qu'ils appartiennent soit au groupe *Sciences-Médecine* (I), soit au groupe *Droit-Lettres* (II).

Arthur ROUSSEAU, 14, rue Soufflot.

Histoire de la Compensation en droit Romain, par C. APPLETON, professeur à la Faculté de droit. *(Fasc. 21)* . . . . 7 fr. 50

Caractères généraux de la loi de 1884 sur les Syndicats professionnels; justification de cette loi; réformes possibles. Etude de législation industrielle, par R. GONNARD, docteur en droit, licencié ès lettres, secrétaire à la Société d'Economie Politique, avec une Préface de M. P. PIC, professeur à la Faculté de Droit. *(Fasc. 36)* . . . 3 fr.

La Représentation des Intérêts dans les Corps élus, par Charles FRANÇOIS, docteur en droit, (II, *Fasc. 2)*. . . . . 8 fr.

Mélanges Ch. Appleton : *Etudes d'histoire du droit*, dédiées à M. Ch. APPLETON, professeur à la Faculté de Droit de Lyon, à l'occasion de son XXVe anniversaire de professorat. (II, *Fasc. 13)*. 15 fr.

Physique sociale. — Emploi combiné du système du Quotient *vrai* et du système du Quotient *fictif* pour la répartition des sièges dans la Représentation proportionnelle, par le Dr MONOYER, professeur de physique médicale à l'Université de Lyon, avec 5 figures dans le texte. (II, *Fasc. 18)*. . . . . 3 fr.

Félix ALCAN, 108, boulevard Saint-Germain.

Lettres intimes de J.-M. Alberoni adressées au comte I. Rocca, ministre des finances du duc de Parme, et publiées d'après le manuscrit du collège de S. Lazaro Alberoni, par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'Ecole Normale, avec un portrait et deux fac-similés. *(Fasc. 8)* . 10 fr.

Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine, par Arthur HANNEQUIN, profes. à la Faculté des Lettres *(Fasc. 14)* 7 fr. 50

Saint Ambroise et la morale chrétienne au IVe siècle, par Raymond THAMIN, ancien maître de conférences à la Faculté des Lettres de Lyon, professeur au Lycée Condorcet. *(Fasc 15)*. 7 fr. 50

La République des Provinces-Unies, la France et les Pays-Bas espagnols de 1630 à 1650, par A. WADDINGTON, professeur à la Faculté des Lettres.
Tome I (1630-42). 1 vol. *(Fasc. 18)* . . . 6 fr.
Tome II (1642-50) avec deux portraits et une carte. 1 vol. *(Fasc. 31)* . . . . 6 fr.

Le Vivarais. Essai de Géographie régionale, par Louis BOURDIN, licencié ès sciences, diplômé d'Etudes supérieures d'Histoire et de Géographie, avec 20 gravures et 2 graphiques dans le texte. *(Fasc. 37)* . . . . 6 fr.

Alphonse PICARD et Fils, 82, rue Bonaparte.

La doctrine de Malherbe d'après son commentaire sur Desportes, par Ferdinand BRUNOT, maître de conférences à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris, avec 5 pl. hors texte. *(Fasc. 1er)*. 10 fr.

Le Fondateur de Lyon. Histoire de L. Munatius Plancus, par M. JULLIEN, professeur à la Faculté des Lettres, avec une planche hors texte. *(Fasc. 9)* . 5 fr.

La Jeunesse de William Wordsworth (1770-1798). **Etude sur le « Prélude »,** par Emile LEGOUIS, prof. à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 22)* 7 fr. 50

La Question des Dix Villes impériales d'Alsace, depuis la paix de Westphalie jusqu'aux arrêts de « Réunions » du Conseil souverain de Brisach (1648-1680), par Georges BARDOT, docteur ès lettres, professeur au Lycée et chargé de conférences à l'Université de Grenoble. (II, *Fasc. 1er)*. 7 fr. 50

EZÉCHIEL SPANHEIM. — **Relation de la Cour de France en 1690,** *nouvelle édition*, établie sur les manuscrits originaux de Berlin, accompagnée d'un commentaire critique, de fac-similés, et suivie de la *Relation de la Cour d'Angleterre en 1704*, par le même auteur, publié avec un index analytique par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'Ecole Normale supérieure, professeur à l'Ecole libre des sciences politiques. (II, *Fasc. 5)* 10 fr.

Histoire de l'Enseignement secondaire dans le Rhône de 1789 à 1900, par CHABOT, professeur de science de l'éducation à l'Université de Lyon, et S. CHARLÉTY, maître de Conférences à la Faculté des Lettr. de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 7)*. 6 fr.

Bibliographie critique de l'Histoire de Lyon, depuis les origines jusqu'à 1789, par Sébastien CHARLÉTY, professeur adjoint à la Faculté des lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 9)* . . . 7 fr. 50

Bibliographie critique de l'histoire de Lyon, depuis 1789 jusqu'à nos jours, par Sébastien CHARLÉTY, professeur adjoint à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 11)* . 7 fr. 50

Pythagoras de Rhégion, par Henri LECHAT, ancien membre de l'Ecole d'Athènes, chargé de cours à l'Université de Lyon, ouvrage contenant dix-huit figures dans le texte (II, *Fasc. 14)*. . . 4 fr.

Les Philosophes et la Société Française au XVIIIe siècle, par M. ROUSTAN, agrégé des Lettres, docteur ès lettres, professeur de rhétorique supérieure au Lycée de Lyon. (II, *Fasc. 16)* . . . . 6 fr.

Documenti per la Storià dei rivolgimenti politici del Comune di Siena, dal 1354 al 1369; pubblicati con introduzione ed indici da Giuliano LUCHAIRE, Incaricato nell' Università di Lione. (II, *Fasc. 17)*. . . . . 7 fr. 50

Bibliographie de la Syntaxe du français, 1840-1905, par Pierre HORLUC et Georges MARINET, agrégés de grammaire, professeurs au Lycée de Lyon (II, *Fasc. 20)*. . . . . 6 fr.

Étude sur les Relations de la Commune de Lyon avec Charles VII et Louis XI (1417-1483), par L. CAILLET, archiviste-paléographe, élève diplômé de l'Ecole des Hautes-Etudes, ancien élève de l'Université de Lyon, ancien attaché à la Bibliothèque Nationale, membre de la Société Française d'Archéologie. (Ouvrage honoré de la médaille d'or de l'Académie d'Arras, le 22 octobre 1908), (II, *Fasc. 21)*. 10 fr.

A. FONTEMOING, 4, rue Le Goff.

Onomasticon Taciteum, par Ph. FABIA, professeur de Philologie classique à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 4)* . 15 fr.

L'« Agamemnon » d'Eschyle, texte, traduction et commentaires, par Paul REGNAUD, professeur à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 6)*. . . 6 fr.

SUR LES

GROUPES DE MATRICES LINÉAIRES

NON INVERTIBLES,

Lyon. — A. REY, Imprimeur de l'Université, 4, rue Gentil. — 49106

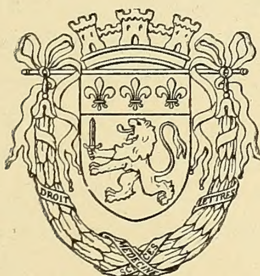
EXEMPLAIRE N° 360

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — **Fascicule 25.**

SUR LES
GROUPES DE MATRICES LINÉAIRES
NON INVERTIBLES,

PAR

Léon AUTONNE,
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Professeur-Adjoint honoraire à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lyon.





LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
4, Rue Gentil

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55

1909

SUR LES

GROUPES DE MATRICES LINÉAIRES NON INVERTIBLES.

INTRODUCTION.

Les groupes linéaires n-aires (c'est-à-dire constitués par des matrices n-aires) ont déjà donné lieu à des recherches extrêmement importantes, qui sont beaucoup trop connues pour avoir besoin d'être rappelées ici. Mais on s'est occupé surtout des groupes *ordinaires,* où chaque matrice est invertible, ayant son déterminant différent de zéro, c'est-à-dire son rang égal à son ordre n.

Dans le présent travail, on s'est affranchi de cette restriction. On a étudié les groupes $\mathfrak{G}$ *à rang variable,* où les diverses matrices ont des rangs quelconques et ne sont pas, en général, invertibles.

Il va sans dire que le problème est encore plus vaste que pour les groupes ordinaires, lesquels sont un cas particulier des groupes $\mathfrak{G}$. Je n'apporte pas, bien entendu, la solution complète du problème. On a seulement établi quelques propositions générales et construit quelques groupes $\mathfrak{G}$ particuliers.

Il est fait usage d'une terminologie géométrique spéciale, assez commode pour résumer et condenser les faits algé-

briques. Cette terminologie a été exposée, avec tout le détail nécessaire, dans une autre publication *Sur les coordonnées plückériennes de droite dans un espace à n — 1 dimensions* (*J. E. P.*, 2e série, Cahier n° 11, p. 109).

Voici les principales propositions auxquelles je suis parvenu.

Soient pour un groupe $\mathfrak{G}$:

ρ, un entier quelconque, $0 \leq \rho \leq n$;
G_ρ, le système constitué par celles des matrices de $\mathfrak{G}$, dont le rang ne dépasse pas ρ;
S, une matrice prise à volonté dans G_ρ;
T, une matrice prise à volonté dans $\mathfrak{G}$.

I. G_ρ *est un groupe qui contient les produits* TS *et* ST.

Si r est le rang minimum des matrices de $\mathfrak{G}$, le groupe $G = G_r$ sera le *noyau* de $\mathfrak{G}$. Le noyau existe toujours, mais se réduit éventuellement, pour $r = 0$, à la seule matrice zéro.

Le présent Mémoire est consacré aux groupes $\mathfrak{G}$, à noyau G, où $r > 0$.

Voici leurs principales propriétés :

II. *Toute matrice* A *de* $\mathfrak{G}$ *peut se mettre sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a & a\alpha_{12} \\ \alpha_{21}a & \alpha_{21}a\alpha_{12} + a_{22} \end{pmatrix} \text{ (1)},$$

où

$a =$ matrice r-aire, $|a| \neq 0$;
$a_{22} =$ matrice $(n - r)$-aire de rang ϖ;
$\alpha_{12} =$ tableau à r lignes et $n - r$ colonnes;
$\alpha_{21} =$ tableau à $n - r$ lignes et r colonnes.

Rang de $A = \varpi + r$.

(1) J'entends par cette notation que, par exemple, le tableau $a\alpha_{12}$ (produit par la matrice r-aire a du tableau α_{12}) est constitué, dans la matrice A, par les $n - r$ derniers éléments de chacune des r premières lignes, etc.

Le cas $a_{22} = 0$ *fournit le noyau* G *lui-même.*

On écrira symboliquement

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}),$$

et, pour une matrice du noyau,

$$(a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, 0) = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}).$$

III. *On a la formule de multiplication*

$$(b, \beta_{12}, \beta_{21}, b_{22})(a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) = (c, \gamma_{12}, \gamma_{21}, c_{22})$$

avec

$$c = b\theta a, \qquad c_{22} = b_{22}\eta^{-1}a_{22},$$
$$\gamma_{12} = \alpha_{12} + (\theta a)^{-1}\beta_{12}a_{22},$$
$$\gamma_{21} = \beta_{21} + b_{22}\alpha_{21}(b\theta)^{-1},$$

où

$$e_r = r\text{-aire unité}, \qquad e_{n-r} = (n-r)\text{-aire unité};$$
$$\theta = e_r + \beta_{12}\alpha_{21}, \qquad \eta = e_{n-r} + \alpha_{21}\beta_{12},$$
$$|\theta| \neq 0, \qquad |\eta| \neq 0, \qquad |a| \neq 0, \qquad |b| \neq 0.$$

On a aussi le cas particulier, pour la multiplication des matrices du noyau,

$$(b, \beta_{21}, \beta_{12})(a, \alpha_{21}, \alpha_{12}) = (b\theta a, \alpha_{12}, \beta_{21}).$$

Sont étudiés d'abord les groupes $\mathfrak{G}$, qui se confondent avec leur noyau G. Cela revient à étudier les groupes n-aires G, à rang fixe r, $r < n$.

Une matrice A d'un pareil groupe G s'écrit, en vertu de ce qui précède, $A = (a_\lambda, u_\sigma, v_\tau)$, $\lambda, \sigma, \tau = 0, 1, 2, \ldots$, où

a_λ = matrice r-aire $|a_\lambda| \neq 0$,
u_σ = tableau à r lignes et à $n-r$ colonnes.
v_τ = tableau à $n-r$ lignes et à r colonnes.

IV. *Les matrices de* G *qui admettent un* u_σ *(un* v_τ*) donné forment un groupe* g_σ *(un groupe* h_τ*), contenu dans* G. *Les matrices communes à* g_σ *et à* h_τ *forment un groupe* $G_{\sigma\tau}$. *Ce dernier est isomorphe, sans hémiédrie, à un groupe* $\Gamma_{\sigma\tau}$, *r-aire, ordinaire.*

En général, G, $G_{\sigma\tau}$, $\Gamma_{\sigma\tau}$ contiennent une infinité de matrices. Il semble difficile de pousser l'étude de G plus loin que le théorème IV, sans s'engager dans la théorie des ensembles (Kantor, etc.). Voici toutefois un cas particulier, assez étendu du reste, où la solution est complète.

V. *Lorsque chaque groupe* $\Gamma_{\sigma\tau}$ *a ses matrices r-aires disposées deux à deux comme inverses l'une de l'autre, alors toutes les matrices de* G *sont fournies par la formule unique*

$$(a_\lambda, u_\sigma, v_\tau), \quad \{\lambda, \sigma, \tau = 0, 1, 2, \ldots\}$$

(*où* $a_0 = e_r$, $u_0 = v_0 = 0$). *Les r-aires* a_λ *engendrent un groupe* Γ, *qui coïncide avec chacun des* $\Gamma_{\sigma\tau}$. *Le même groupe* Γ *contient toutes les r-aires*

$$(1) \qquad e_r + u_\sigma v_\tau = \theta_{\sigma\tau}.$$

Une fois le groupe Γ *choisi, on peut prendre les t bleaux* u_σ *et* v_τ *à volonté, de façon toutefois à satisfai à l'unique condition* (1).

VI. *Le théorème V a lieu pour les groupes* G *d'ord fini* $\Omega = \omega pq$. *Alors*

$$\sigma = 0, 1, \ldots, p-1; \qquad \tau = 0, 1, \ldots, q-1;$$
$$\lambda = 0, 1, \ldots, \omega - 1.$$

Les pq matrices r-aires $\theta_{\sigma\tau}$ *sont comprises parmi les* ω *m. trices* a_λ.

Voici maintenant un résultat relatif aux groupes $\mathfrak{G}$ qui n se confondent pas avec leur noyau G.

VII. *Soient*

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22})$$

une matrice arbitraire de $\mathfrak{G}$ *et* $\mathfrak{A}$ *la matrice obtenue en*

faisant, dans A, $a_{22} = 0$,

$$\mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}).$$

Si le noyau satisfait au théorème V, la matrice $\mathcal{A}$ *elle-même figure au noyau. La construction de* $\mathfrak{C}$ *se ramène à celle du noyau.*

J'espère, dans une publication ultérieure, revenir sur la construction effective des groupes $\mathfrak{G}$, à noyau G. Pour le moment, on se contente d'étudier quelques groupes $\mathfrak{G}$, définis par certaines sujétions arbitraires choisies *a priori*.

Si A et B sont deux matrices, avec $|A| \neq 0$, la matrice C, telle que

$$C = A^{-1}BA \qquad \text{ou} \qquad AC = BA,$$

est, comme on sait, la *transformée* de B par A. La relation $AC = BA$ permet de conserver ce nom à C, même si $|A| = 0$. Seulement la transformée C, éventuellement, manque ou est indéterminée.

Soient :

H, un groupe;
B, une matrice prise à volonté dans H;
A, une matrice quelconque.

Si H contient au moins une matrice C, telle que $AC = BA$, on dira que « le groupe H est *permutable* à la matrice A ». H est *permutable à lui-même* s'il est permutable à chacune de ses matrices.

VIII. *Tout groupe* $\mathfrak{G}$, *qui possède un noyau* G *et est permutable à lui-même, est composé, pour un choix convenable de variables, de matrices*

$$(a, \alpha_{12}, 0, \alpha_{22}) = \begin{pmatrix} a & a\alpha_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dans chaque matrice, les $n - r$ dernières lignes ont leurs

r premières colonnes composées de zéros. Suivant une locution consacrée, le groupe $\mathfrak{G}$ est *réductible*.

IX. *Tout groupe $\mathfrak{G}$, dont le noyau* G, *sans être permutable à soi-même, est permutable à toute matrice de $\mathfrak{G}$, extérieure à* G, *est semblable à un groupe où, dans chaque matrice, les k dernières lignes,* $\{k \leqq n - r\}$, *ont leurs r premières colonnes composées de zéros. Pour les matrices de* G *elles-mêmes, les k dernières lignes sont composées de zéros.*

Le cas particulier $k = n - r$ ramène au théorème précédent.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I. Weierstrass, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (*Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, 1868, p. 310).

II. Frobenius, *Uber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 1).

III. Autonne, *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon;* Rey, à Lyon; Gauthier-Villars, à Paris; 1905).

On consultera surtout le premier Chapitre de la première Partie.

IV. Autonne, *Sur les coordonnées plückériennes de droite, dans un espace à n — 1 dimensions* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 11e Cahier, p. 109).

V. Ranum, *The Group-Membership of singular Matrices* (*American Journal of Mathematics*, vol. XXXI, n° 1).

On renverra à la présente liste par une notation telle que celle-ci, par exemple :

(II, *Index*)

pour désigner le Mémoire de M. Frobenius, qui porte le chiffre romain II de la liste.

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. On renverra, par exemple, à l'exposé de M. Frobenius (II, *Index*) pour les méthodes de notation et de calcul symbolique, aujourd'hui bien classiques, en usage quand il s'agit de matrices linéaires.

Toutefois j'ai dû (III et IV, *Index*), pour certaines questions spéciales, développer et approprier un peu ces méthodes.

C'est ce qu'on rappellera ici brièvement, renvoyant aux publications précitées pour toutes démonstrations.

2. La notation

$$A = [a_{ij}] = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix} \qquad \{ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n \}$$

désignera un *tableau* (m, n)*-aire* (c'est-à-dire à m lignes et à n colonnes), dont les mn lettres a_{ij} sont les *éléments*.

Si $m = n$, on a un *tableau carré* ou *matrice n-aire*.

Un déterminant de matrice n-aire sera dit un déterminant *n-aire*. Un pareil déterminant aura des mineurs *q-aires*, c'est-à-dire d'ordre $n - q$, $q \leq n$, ou des mineurs $(n-q)^{\text{ièmes}}$.

Le tableau A fournira des déterminants

$$\rho\text{-aires} \quad \{ \rho \leqq m,\ \rho \leqq n \},$$

ou des mineurs ρ-aires.

Si tous les mineurs $(r+1)$-aires de A sont nuls, un au moins des mineurs r-aires étant différent de zéro, on dit que le tableau a le *rang* r et l'on écrit

$$r = \mathrm{Rg}[a_{ij}].$$

Soit ϖ le plus petit des entiers m et n (ou leur valeur commune s'ils sont égaux); le tableau est *correct* si r atteint son maximum ϖ.

3. Un tableau (m, n)-aire sera fréquemment décomposé en tableaux *partiels,* obtenus en répartissant, en un certain nombre de groupes, les m lignes et les n colonnes.

On écrira alors

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccc} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & \dots & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & A_{\mu\nu} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & \dots & \dots & \dots & A_{MN} \\ n_1 & \dots & n_\nu & \dots & n_N \end{array} \right\} \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_\mu \\ \dots \\ m_M \\ \\ \end{array}$$

où

$$A_{11} = \text{tableau } (m_1,\ n_1)\text{-aire},$$
$$A_{12} = \text{tableau } (m_1,\ n_2)\text{-aire},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A_{\mu\nu} = \text{tableau } (m_\mu,\ n_\nu)\text{-aire},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_\mu + \dots + m_M,$$
$$n = n_1 + \dots\dots + n_\nu + \dots + n_N.$$

4. Les MN tableaux

$$A_{11}, \quad \dots, \quad A_{\mu\nu}, \quad \dots, \quad A_{MN},$$

considérés chacun comme une lettre unique, forment un tableau (M, N)-aire

$$\mathfrak{A} = [A_{\mu\nu}] \qquad \{\mu = 1, 2, \ldots, M;\ \nu = 1, 2, \ldots, N\},$$

qui sera dit le *canevas* du tableau A.

5. Soient

$$A = [a_{ij}] = \text{tableau } (m, n)\text{-aire},$$
$$B = [b_{jk}] = \text{tableau } (n, p)\text{-aire}$$
$$\{i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Le tableau (m, p)-aire $C = [c_{ik}]$, où

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$$

sera par définition le *produit* AB.

6. Soient

$$\mathfrak{A} = [A_{\mu\nu}], \qquad \mathfrak{B} = [B_{\nu\varpi}]$$
$$\{\mu = 1, \ldots, M;\ \nu = 1, 2, \ldots N;\ \varpi = 1, 2, \ldots, P\}$$

les canevas de A et B. On supposera d'ailleurs les colonnes de A réparties en groupes à $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots, n_N$ colonnes, *de la même façon* que les lignes de B sont réparties en groupes à $n_1, \ldots, n_\nu, \ldots, n_N$ lignes.

Alors le canevas de C sera

$$\mathfrak{C} = [C_{\mu\varpi}], \qquad C_{\mu\varpi} = \sum_\nu A_{\mu\nu} B_{\nu\varpi};$$

autrement dit, *le canevas d'un produit est le produit des canevas.*

Pour la démonstration je renverrai :

Soit au travail de M. Kreis, *Contribution à la théorie des systèmes linéaires* (Thèse de Zurich, 1906),

Soit au Chapitre IV de mon Mémoire *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité* (*Journal de Mathématiques*, 1907, p. 53).

7. Se déduit de là la formule suivante, d'un usage continuel dans la suite :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{pmatrix},$$

où

A_{11}, B_{11} = matrice r-aire,
A_{22}, B_{22} = matrice $(n-r)$-aire,
A_{12}, B_{12} = tableau $(r, n-r)$-aire,
A_{21}, B_{21} = tableau $(n-r, r)$-aire.

8. Soit le tableau (m, n)-aire,

$$A = [a_{ij}].$$

Le symbole $A[z]$ désignera l'ensemble des m expressions

$$\sum_j a_{ij} z_j,$$

de façon que la relation $A[z] = 0$ sera une façon symbolique d'écrire les m équations

$$\sum_j a_{ij} z_j = 0.$$

Si (n° 5)

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{jk}]$$

sont des tableaux (m, n)-aire et (n, p)-aire respectivement, le symbole

$$A\big[B[z]\big]$$

ne sera pas autre chose que $AB[z]$.

Il est évident que

$$A[z + z'] = A[z] + A[z'].$$

9. Je suppose connue du lecteur la théorie des *Elementarteiler* de Weierstrass (I, *Index*).

Elementarteiler est traduit par *successif*, sous-entendant facteur ou diviseur.

10. On sait que toute matrice n-aire peut, par l'intervention d'une collinéation convenable, être mise sous forme *typique* (III, *Index*, Ire Partie, Chap. I).

Supposons le déterminant caractéristique

$$\Delta = |\rho E - A| \qquad \{E = \text{matrice } n\text{-aire unité}\},$$

de la matrice n-aire A décomposé en ses successifs :

$$\begin{aligned}\Delta = \Pi(\rho - l)^{\lambda} = \ & (\rho - a)^{\alpha_1}(\rho - a)^{\alpha_2}\ldots(\rho - a)^{\alpha_k} \\ & \times (\rho - b)^{\beta_1}(\rho - b)^{\beta_2}\ldots(\rho - b)^{\beta_g} \\ & \times (\rho - c)^{\gamma_1}(\rho - c)^{\gamma_2}\ldots(\rho - c)^{\gamma_h} \times \ldots \\ & (a \neq b \neq c \neq \ldots);\end{aligned}$$

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \beta_1 + \ldots + \beta_g + \gamma_1 + \ldots + \gamma_h + \ldots;$$

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_k; \qquad \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \beta_g; \qquad \ldots;$$

$$N = k + g + h + \ldots.$$

11. La forme typique a pour canevas (n° 4) une matrice N-aire, où ne sont différents de zéro que les éléments situés sur la diagonale principale. Ce canevas est

$$\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{cccc} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & & . \\ . & \ldots & \ddots & . \\ 0 & 0 & . & A_{NN} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & . & \ldots \end{array} \end{array}$$

Les A_{11}, A_{22}, ... sont des matrices, respectivement α_1-aire, α_2-aire, ..., β_1-aire, β_2-aire, ..., qui correspondent aux N successifs

$$(\rho - a)^{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad (\rho - b)^{\beta_1}, \quad \ldots.$$

Ce sont les *matrices partielles* ou *composantes* de la forme typique.

La matrice partielle qui correspond au successif $(\rho - l)^\lambda$ est λ-aire. Elle s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} l & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & l & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & l & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & l & & . & . \\ . & . & . & . & \ddots & & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & l & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & l \end{pmatrix};$$

autrement dit : dans L sont nuls tous les éléments, sauf ceux de la diagonale principale et de la diagonale parallèle immédiatement supérieure.

Ceux de la diagonale principale sont tous égaux à l. Ceux de l'autre diagonale sont tous égaux à l'unité.

Le déterminant caractéristique de L n'a qu'un successif, précisément $(\rho - l)^\lambda$.

12. Les matrices partielles afférentes à une même racine distincte a, b, c, ... de l'équation caractéristique constituent un *hypersystème* (a), (b), (c), ...

Si le déterminant de la matrice n-aire est nul, on aura l'hypersystème (o), qui joue un grand rôle dans la suite du présent travail.

13. Au lieu de dire une matrice n-aire, un tableau (m, n)-aire, on dira aussi une n-aire, un (m, n)-aire.

14. On sait qu'un groupe $\mathfrak{G}$ est *réductible* lorsqu'il est semblable à un groupe de la forme

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ n-p \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} p & \quad n-p \end{matrix}$$

tel que, dans chaque matrice, les p premières colonnes des $n-p$ dernières lignes sont composées de zéros.

Aux groupes réductibles se rattachent les groupes

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ q \\ n-p-q \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} p & q & n-p-q \end{matrix}$$

mais les tableaux B_{21} et B_{32} sont assujettis à certaines conditions, sans quoi il n'y aurait plus groupe.

Au dernier Chapitre du Mémoire, on trouvera des exemples de groupes réductibles et de groupes $\mathfrak{B}$.



CHAPITRE II.

INTERSECTION ET ADDITION DES DROITES.

1. On a donné ailleurs (IV, *Index*) la théorie détaillée des droites, de degré quelconque, dans un espace à $n - 1$ dimensions.

Je me bornerai donc à rappeler brièvement et sans démonstration les principes de cette théorie. Mais je résoudrai aussi quelques problèmes auxiliaires, assez élémentaires en eux-mêmes, mais nécessaires pour la suite de ces recherches.

2. Dans un espace $\mathfrak{E}_n$, à $n - 1$ dimensions, prenons

$$\{j = 1, 2, \ldots, n\}$$

un point x par ses n coordonnées homogènes x_j,
un plan u » » » u_j.

m points a_i (plans α_i) de coordonnées a_{ij} (de coordonnées α_{ij})

$$\{i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

seront dits *linéairement distincts*, si le tableau (m, n)-aire $[a_{ij}]$ (ou $[\alpha_{ij}]$) est de rang m, $m \leqq n$, ou *correct*.

3. Prenons m points linéairement distincts $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et un point mobile x, tel que

$$x_j = \sum_i t_i a_{ij};$$

$t_i =$ paramètre variable.

Le lieu du point x est, par définition, une droite d_m de *degré* m.

Une droite d_m est définie par m quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient linéairement distincts.

4. Prenons deux tableaux, corrects (Chap. I, n° 2) l'un et l'autre :

$$a = [a_{ij}], \qquad (m, n)\text{-aire},$$
$$\alpha = [\alpha_{kj}], \qquad (n - m, n)\text{-aire}$$
$$\{ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n - m \}.$$

Je les suppose *adjoints*. Autrement dit,

$$\sum_j a_{ij}\alpha_{kj} = 0$$

pour tout choix d'indices i et k, ou bien

$$a\alpha' = \alpha a' = 0, \qquad \alpha' = \text{le tableau transposé de } \alpha, \qquad \ldots.$$

Les m points a_i, linéairement distincts, définissent une droite d_m, de degré m, laquelle est aussi le lieu des points x tels que

$$(1) \qquad \sum_j \alpha_{kj} x_j = 0.$$

d_m est donc aussi l'intersection des $n - m$ plans (1), linéairement distincts.

d_m aura la *classe* $n - m$.

5. Une même droite est donc définie de deux façons différentes, qui se correspondent *dualistiquement*, savoir :

par le tableau a, c'est-à-dire par m points linéairement distincts,

par le tableau α, c'est-à-dire par $n - m$ plans linéairement distincts.

6. L'*intersection* de deux droites est, par définition, le lieu des points communs aux deux droites.

Cette intersection est évidemment encore une droite.

Une droite b_β est *située* ou *contenue* dans a_α, $\alpha \geqq \beta$, si tous les points de b_β (c'est-à-dire β points linéairement distincts) sont sur a_α.

7. Soient a_α et b_β deux droites définies respectivement par un système $\mathfrak{X}$ de $n-\alpha$ plans et par un système $\mathfrak{Y}$ de $n-\beta$ plans. L'intersection c_γ sera définie par les $2n-\alpha-\beta$ plans du système $\mathfrak{Z}$, obtenu en réunissant $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$.

Si les $2n-\alpha-\beta$ plans de $\mathfrak{Z}$ se réduisent à $2n-\alpha-\beta-h$ plans linéairement distincts, c_γ aura la classe

$$2n-\alpha-\beta-h$$

et le degré

$$\gamma = n-(2n-\alpha-\beta-h) = \alpha+\beta+h-n.$$

Si

$$\alpha+\beta+h-n \leqq 0,$$

a_α et b_β *ne se rencontrent pas.*

8. Je dirai d'une façon expéditive, quoique pas rigoureusement exacte, que a_α et b_β ont γ *points communs* ou $n-\gamma$ *plans communs*. Les deux systèmes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ ont h plans communs, et l'on peut dire que chaque plan commun aux deux systèmes augmente d'une unité le degré de l'intersection.

Du reste, l'intersection de diverses droites s'obtiendra toujours et d'une façon complète par des procédés donnés ailleurs (IV, *Index*, 41°).

9. Je dirai que a_α et b_β sont *complémentaires* si $\alpha+\beta=n$ et si ces deux droites ne se rencontrent pas.

Si les deux droites a_α et b_β sont définies, comme intersection de plans (n° 5), par les deux tableaux (α, n) aire et (β, n)-aire $[u_{ij}]$ et $[v_{kj}]$ respectivement

$$\{j=1, 2, \ldots, n;\ i=1, 2, \ldots, \alpha;\ k=1, 2, \ldots, \beta\},$$

pour que a_α et b_β soient complémentaires, il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\alpha 1} & \ldots & u_{\alpha n} \\ v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{\beta 1} & \ldots & v_{\beta n} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad \alpha+\beta=n.$$

On peut donc toujours et d'une infinité de façons construire la droite complémentaire d'une droite donnée.

10. Soient a_α et b_β deux droites *qui ne se rencontrent pas.*

Prenons sur a_α (sur b_β) α points a_i (β points b_k) linéairement distincts. Ces $\alpha + \beta$ points sont linéairement distincts.

En effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver au moins un système de $\alpha + \beta$ quantités λ_i et μ_k tel que

$$\sum_i \lambda_i a_{ij} - \sum_k \mu_k b_{kj} = 0.$$

Alors le point x tel que

$$x_j = \sum_i \lambda_i a_{ij} = \sum_k \mu_k b_{kj}$$

serait à la fois sur a_α et sur b_β, qui se rencontreraient, ce qui est absurde.

Les $\alpha + \beta$ points en question définissent donc sans ambiguïté une droite c de degré $\alpha + \beta$; c est indépendante de la façon dont on choisit les points a_i ou b_β sur la droite a_α ou b_β.

On dira que c est la *somme* des deux droites a_α et b_β, et l'on écrira

$$c = a_\alpha + b_\beta.$$

11. Un point est une droite de degré 1 et de classe $n - 1$. Un plan est une droite de degré $n - 1$ et de classe 1. L'espace $\mathfrak{E}_n$ lui-même est une droite de degré n et de classe zéro. Cet espace $\mathfrak{E}_n$ est donc la somme de deux droites complémentaires (n° 9) quelconques.

12. Voici maintenant un problème dont la solution nous sera utile (Chap. I, Ire Partie, n° 7) :

Soient une droite $c_{\alpha+\beta}$ et une droite a_α située sur $c_{\alpha+\beta}$. Construire une droite b_β telle que $c_{\alpha+\beta} = a_\alpha + b_\beta$.

Il faut et il suffit que b_β :
soit située sur $c_{\alpha+\beta}$;
ne rencontre pas a_α.

Une droite d_m de degré m est un espace à $m - 1$ dimensions, entièrement assimilable à l'espace $\mathfrak{E}_n$. Pour s'en assurer, il suffit de définir d_m par les $n - m$ équations

$$0 = x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{m+1},$$

car alors les m variables $x_1, \ldots, x_m$ prennent sur d_m des valeurs arbitraires.

Considérons donc la droite $c_{\alpha+\beta}$ comme un espace $\mathfrak{E}_{\alpha+\beta}$. Il faut et il suffit que, dans cet espace, les droites a_α et b_β soient complémentaires (n° 9). Or on sait toujours et d'une infinité de façons construire, dans un espace donné, la complémentaire d'une droite donnée; cela résulte du n° 9.



PREMIÈRE PARTIE [1].

MULTIPLICATION ET DIVISION DES TABLEAUX ET DES MATRICES.

CHAPITRE I.

DIVISIBILITÉ DES TABLEAUX.

1. Soit

$$A = [a_{ij}] \qquad \{ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n \}$$

un tableau (m, n)-aire, c'est-à-dire à m lignes et à n colonnes.

Nommons r le rang de A; r ne peut dépasser le plus petit des deux entiers m et n. Posons

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

Les x_j (ou les y_i) sont les coordonnées homogènes d'un point x (ou y) dans un espace $\mathfrak{E}_n$ (ou $\mathfrak{E}_m$), à $n - 1$ (ou à $m - 1$) dimensions.

y est le *point-image* de x par la *transformation* A. Si

(1) Je ne prétends pas donner comme essentiellement nouvelles les propositions contenues dans cette première Partie. Tout cela rentre au fond dans la théorie des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

Mais la terminologie géométrique, introduite dans cette première Partie, abrège, dans le reste du Mémoire, les démonstrations et permet d'y utiliser immédiatement les résultats que j'ai déjà obtenus ailleurs (*Index*, III et IV).

$m = r = n$, la transformation devient la collinéation n-aire; le tableau (m, n)-aire est une matrice n-aire.

2. Quel est le lieu des points x dont l'image est indéterminée?

On a les m équations qui se réduisent à r distinctes

$$\sum_j a_{ij} x_j = 0.$$

Le lieu est une droite

$$\Delta = \Delta[A]$$

de l'espace $\mathfrak{E}_n$, *ayant la classe* r *et le degré* $n - r$.

3. Quel est le lieu, dans l'espace $\mathfrak{E}_m$, du point y, quand x parcourt tout l'espace $\mathfrak{E}_n$?

Entre les m équations

$$\sum_j a_{ij} x_j = y_i,$$

éliminons les n variables x_i, qui s'y réduisent à r distinctes. Il viendra, entre les m quantités y_i, $m - r$ relations distinctes linéaires et homogènes.

Le lieu cherché est une droite $D = D[A]$, *de classe* $m - r$ *et de degré* r.

4. M_0 et N_0 étant des collinéations m-aire et n-aire respectivement, considérons le tableau $\mathcal{A} = M_0 A N_0$. On peut choisir M_0 et N_0 de façon que :

$\Delta[\mathcal{A}]$ ait pour équations

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0,$$

tandis que :

$D[\mathcal{A}]$ a pour équations

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \ldots = y_m = 0.$$

Alors, avec nos notations habituelles,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

On peut même faire que la matrice r-aire a, avec $|a| \neq 0$, se réduise à la r-aire unité e_r.

Bref, posant

$$M = M_0^{-1}, \qquad N = N_0^{-1},$$

on peut mettre tout tableau A sous la forme MUN, où

$$U = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

Dans beaucoup de questions, les collinéations M et N sont indifférentes; on en peut faire abstraction et écrire

$$A = U.$$

5. M et N conservant la même signification, prenons divers tableaux (m, n)-aires A, B, C, ... On voit immédiatement que :

les situations mutuelles respectives des droites $\Delta[AN]$, $\Delta[BN]$, ... sont les mêmes que celles des droites $\Delta[A]$, $\Delta[B]$, ...	les situations mutuelles respectives des droites $D[MA]$, $D[MB]$, ... sont les mêmes que celles des droites $D[A]$, $D[B]$, ...

Par exemple, si $\Delta[A]$ est sur $\Delta[B]$, $\Delta[AN]$ est sur $\Delta[BN]$, etc.

Je fais dans la suite, et souvent d'une façon implicite, grand usage de cette remarque.

6. Au Chapitre II des Préliminaires, on a défini l'inter-

section et la somme de deux droites a_α et b_β de degrés α et β respectivement.

L'intersection sera indiquée par la notation

$$\{ a_\alpha, b_\beta \},$$

et la somme par la notation

$$a_\alpha + b_\beta.$$

7. Soit

$$f_\varphi = \{ a_\alpha, b_\beta \}.$$

Construisons une droite $d_{\alpha-\varphi}$ telle que

$$a_\alpha = f_\varphi + d_{\alpha-\varphi}.$$

Le problème a été résolu au n° 12 du Chapitre II des Préliminaires.

On y a vu qu'il existe une infinité de solutions.

Pour a_α et b_β données, f_φ est déterminée, mais non $d_{\alpha-\varphi}$.

8. Quand le point x parcourt, dans l'espace $\mathfrak{E}_n$, une droite $a = a_\alpha$, de degré α, le point-image y parcourt, dans l'espace $\mathfrak{E}_m$, une droite

$$f = f_\varphi = A[a],$$

image par A de la droite a.

Quel est le degré φ de f?

Il est évident (n° 4) qu'il est licite, sans changer la généralité, de faire $A = U$ (n° 4). On écrira

$$\Delta = \Delta[U], \qquad D = D[U].$$

Nommons β le degré de la droite

$$b = \{ a, \Delta \},$$

intersection de a avec Δ; introduisons (n° 7) une droite d de degré $\alpha - \beta$, telle que

$$a = d + b.$$

b sera définie par β points $b^{(1)}, \ldots, b^{(\beta)}$ linéairement distincts,

lesquels, étant sur la droite Δ, auront (n° 4) leurs r premières coordonnées nulles,

$$b_j^{(\lambda)} = 0 \qquad \{ j = 1, 2, \ldots, r;\ \lambda = 1, 2, \ldots, \beta \}.$$

d sera définie par $\alpha - \beta$ points $d^{(\mu)}$, de coordonnées $d_j^{(\mu)}$

$$\{ \mu = 1, 2, \ldots, \alpha - \beta;\ j = 1, 2, \ldots, n \},$$

et linéairement distincts.

Il viendra, quand x parcourt la droite a, les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_j = \sum_\lambda t_\lambda b_j^{(\lambda)} + \sum_\mu s_\mu d_j^{(\mu)} & \text{pour } j > r, \\ x_j = \sum_\mu s_\mu d_j^{(\mu)} & \text{pour } j \leqq r \end{cases}$$

(t_λ, s_μ = param. arbitr.).

Or (n° 4), si

$$y = \mathrm{U}[x],$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad y_r = x_r,$$

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \ldots = y_m = 0.$$

Donc, eu égard aux formules (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} y_k = \sum_\mu s_\mu d_k^{(\mu)} & \{ k = 1, 2, \ldots, r \}, \\ y_k = 0 & \{ k = r + 1, \ldots, m \}. \end{cases}$$

Comme les $\alpha - \beta$ points $d^{(\mu)}$ sont linéairement distincts, y parcourt une droite f, située sur D, et ayant $\alpha - \beta$ pour degré; $\varphi = \alpha - \beta$.

De là la proposition suivante :

Théorème. — *Une droite* a *de l'espace* $\mathfrak{E}_n$, *ayant le degré* α, *a pour image par* A *dans l'espace* $\mathfrak{E}_m$ *une droite* f. *Le degré de* f *est égal à* α, *moins le degré de l'intersection* { a, Δ[A] }. f *est sur* D[A].

9. Une même f est l'image d'une infinité de droites a.

En effet, un même point y de D[A] (lequel point est une droite de degré 1) est l'image de tous les points d'une droite de degré h dans $\mathfrak{E}_n$, ayant avec Δ[A] une intersection de degré $h - 1$.

Voici comment on le voit, en prenant, ce qui est licite, U pour A.

Pour y donné sur

$$D[A] = D[U] = D,$$

les coordonnées de x sont liées par les $r - 1$ équations

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_r}{y_r}$$

d'une droite Y, ayant $r - 1$ pour classe et

$$n - (r - 1) = n - r + 1$$

pour degré. Δ est située tout entière sur Y. Comme Δ a $n - r$ pour degré, on a

$$Y = \Delta + \eta,$$

η étant une droite de premier degré (un point) non située sur Δ.

Pour que tous les points d'une droite a de degré h aient y pour image, il faut et il suffit que a soit située sur Y. Comme a ne peut être située sur Δ, il faut que a contienne le point η et une droite de degré $h - 1$ commune avec Δ.

C. Q. F. D.

10. Considérons deux tableaux

A (m, n)-aire, de rang α,
B (p, m)-aire, de rang β,

et leur produit $C = BA$, qui est un tableau (p, n)-aire de rang γ. Je vais rechercher ce que sont γ, Δ[C] et D[C].

Posons

$$y = C[x], \qquad y = B[z], \qquad z = A[x],$$

où x, z, y ont respectivement pour lieu les espaces $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{E}_m$, $\mathfrak{E}_p$.

11. Soit x le point courant sur $\Delta[C]$. D'abord x parcourt $\Delta[A]$. Cherchons ce qu'il existe de la droite $\Delta[C]$ en dehors de $\Delta[A]$. Pour que x soit sur $\Delta[C]$ sans être sur $\Delta[A]$, il faut et il suffit que z soit sur $\Delta[B]$. Mais z est sur $D[A]$. x est donc tel que z soit sur la droite

$$\mathrm{a} = \{ \Delta[B], D[A] \}$$

de degré h. On peut construire (n[os] 6, 7, 8 et 9) dans l'espace $\mathfrak{E}_n$ une droite δ de degré h et ne rencontrant pas $\Delta[A]$, telle que a soit l'image par A de δ,

$$\mathrm{a} = A[\delta].$$

Alors évidemment

$$(1) \qquad \Delta[C] = \Delta[A] + \delta.$$

δ n'est pas complètement déterminée, mais cela n'empêche pas $\Delta[C]$ d'être unique et bien déterminée (n° 7).

La relation (1) montre que $\Delta[C]$ contient $\Delta[A]$. Le degré $n - \gamma$ de $\Delta[C]$ est égal au degré h de δ, augmenté du degré $n - \alpha$ de $\Delta[A]$. Finalement

$$n - \gamma = h + n - \alpha \qquad \text{et} \qquad \gamma = \alpha - h.$$

γ ne saurait devenir négatif, car le degré h de

$$\{ \Delta[B], D[A] \} = \mathrm{a}$$

ne peut dépasser le degré α de $D[A]$.

On a ainsi une proposition importante :

THÉORÈME. — *Le rang d'un produit* $C = BA$ *s'obtient en retranchant du rang du second facteur* A *le degré de l'intersection*

$$\{ \Delta[B], D[A] \}.$$

La droite $\Delta[A]$ *est située sur la droite* $\Delta[C]$.

12. Le rang γ de $C = BA$ ne peut dépasser le rang α de A. Si l'on transpose, on a $C' = A'B'$. Le rang γ de C' ne peut dépasser le rang β de B, qui est aussi le rang du second facteur B'. Finalement :

Le rang d'un produit ne surpasse le rang d'aucun des facteurs.

13. Étudions maintenant D[C], en gardant les mêmes notations (n°s 11 et 12).

D[C] est l'image par B de D[A]. Posons (n° 7)

$$D[A] = a + b,$$

où b est, dans l'espace $\mathfrak{E}_m$, une droite de degré $\alpha - h$, laquelle ne rencontre pas Δ[B]. D'après la théorie du n° 8,

$$D[C] = B[b]$$

et a $\alpha - h$ pour degré, comme il fallait s'y attendre. D[C] est évidemment située sur D[B]. Finalement :

La droite D *d'un produit est située sur la droite* D *du premier facteur.*

14. Théorème. — *Pour que l'équation*

$$AX = B$$

soit possible, où

A	est un tableau	(p, m)-aire	donné,
X	»	(m, n)-aire	inconnu,
B	»	(p, n)-aire	donné,

il faut et il suffit que la droite D[A] *contienne la droite* D[B].

Posons (n° 4)

$$A = PUM,$$

où

P est une collinéation p-aire,
M » » m-aire,
U est le tableau (p, m)-aire.

$$U = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix}$$
$$\quad r \quad m-r$$

r étant le rang de A. e_r est la r-aire unité.

Il viendra, multipliant A et B à gauche par P^{-1}, ce qui ne change pas (n° 5) la situation respective de leurs droites D,

$$B = PUMX, \qquad P^{-1}B = UMX,$$

ou simplement

$$UX = B,$$

faisant entrer P^{-1} dans B et M dans X.

Écrivons

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix}$$
$$\quad r \quad n-r \qquad\qquad\qquad r \quad n-r$$

$$B = UX = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'identification donne

(1) $$B_{21} = B_{22} = 0,$$

moyennant quoi

$$X_{11} = B_{11}, \qquad X_{12} = B_{12};$$

X existe, X_{21} et X_{22} restant indéterminés.

Or les relations (1) expriment précisément que D[B] est située sur la droite D[U] dont les équations sont

$$y_{r+1} = \ldots = y_m = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

15. Théorème. — *Pour que l'équation*

$$XA = B$$

soit possible, où

X est un tableau (p, m)-aire inconnu,
A » » (m, n)-aire donné,
B » » (p, n)-aire donné,

il faut et il suffit que la droite

$\Delta[B]$ *contienne la droite* $\Delta[A]$.

On fera, comme plus haut, $A = U$ et l'on écrira, r étant le rang de A (toujours sous le bénéfice de la remarque du nº 5),

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix} \qquad A = U = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & m-r \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

De là

$$XA = XU = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

L'identification de XU avec B donne

$$(2) \qquad B_{12} = B_{22} = 0,$$

moyennant quoi X existe, puisqu'il suffit de faire

$$X_{11} = B_{11}, \qquad X_{21} = B_{21},$$

les tableaux X_{12} et X_{22} restant arbitraires.

Mais les relations (2) expriment précisément que le point

$$y = B[x]$$

est indéterminé pour

$$x_1 = \ldots = x_r = 0.$$

Autrement dit,

$$\Delta[U] = \Delta[A]$$

est située sur la droite $\Delta[B]$. C. Q. F. D.

16. Aux nos 14 et 15 on n'a rien spécifié *a priori* sur la nature du tableau inconnu X. Si l'on impose à X certaines sujétions (de se trouver, par exemple, dans un système de tableaux donné d'avance), X peut manquer, même si les conditions des théorèmes sont remplies. Il se produirait les éventualités les plus variées : il y aurait ρ valeurs de X, ρ étant un entier nul, fini ou infini.

17. Les théorèmes des nos 14 et 15 résolvent le problème relatif à la *divisibilité des tableaux*.

18. Soient, dans un espace $\mathfrak{E}_n$, deux droites a et b de degrés α et β. a est définie par un système $\mathfrak{x}$ de $n-\alpha$ équations distinctes; b est donnée par un pareil système $\mathfrak{y}$ de $n-\beta$ équations. L'intersection $c = \{a, b\}$ est donnée par le système $\mathfrak{z}$ obtenu en réunissant $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$. Si les $2n-\alpha-\beta$ équations de $\mathfrak{z}$ se réduisent à

$$2n-\alpha-\beta-h$$

distinctes, la classe de c est $2n-\alpha-\beta-h$ et le degré de c est $\alpha+\beta+h-n$.

19. On ne peut manquer d'être frappé par les analogies que présentent les considérations des nos 8 et 9 avec la théorie des *points fondamentaux* et des *variétés fondamentales* dans les substitutions birationnelles (III, *Index*, IIe Partie).

Par exemple, dans la transformation

$$y = A[x],$$

A étant un tableau (m, n)-aire, la droite $\Delta[A]$ est le lieu des points fondamentaux de la transformation, etc.



CHAPITRE II.

RANGS DES PUISSANCES D'UNE MATRICE.

20. Soit une matrice n-aire A, de rang r; posons $\Delta = \Delta[A]$, $D = D[A]$. Nommons F, de degré f, l'intersection $\{D, \Delta\}$. Nous allons construire Δ et D et calculer f en prenant A sous la forme typique. Soit

$$|\rho E - A| = \Pi(\rho - l)^\lambda$$

le déterminant caractéristique décomposé en ses successsifs $(\rho - 1)^\lambda$.

Écrivons enfin

$$y = A[x].$$

Au successif $(\rho - l)^\lambda$ correspond une matrice partielle λ-aire L. Parmi les n variables x (ou y) il y en a λ, savoir $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda$ (ou $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\lambda$), afférentes à la matrice partielle L.

On a

$$(1) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = l z_1 + z_2, \\ \zeta_2 = l z_2 + z_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \zeta_{\lambda-1} = l z_{\lambda-1} + z_\lambda, \\ \zeta_\lambda = l z_\lambda. \end{cases}$$

21. Toute relation linéaire et homogène entre les z (ou entre les ζ) est distincte de toute relation analogue entre les z (ou les ζ), afférentes à une autre matrice partielle.

Par conséquent

$$r = \text{cl.}\,\Delta = \Sigma\,\text{cl.}\,\Delta[L],$$
$$n - r = \text{cl.}\,D = \Sigma\,\text{cl.}\,D[L],$$
$$f = \Sigma\varphi$$

(cl. Δ désignant la classe de Δ), où la sommation s'étend aux diverses matrices partielles et φ est le degré de la droite

$$\{\Delta[L],\quad D[L]\}.$$

22. Prenons d'abord L en dehors de l'hypersystème (O); $l \neq 0$, $|L| \neq l^\lambda = 0$. Alors cl. $\Delta[L] = \lambda$, cl. $D[L] = 0$. Bien entendu, les droites $\Delta[L]$ et $D[L]$ sont envisagées dans un espace $\mathfrak{T}_\lambda$, lieu des points z et ζ. L fournit un contingent nul (n° 21) à cl. D et à f. Nous laisserons donc de côté les matrices partielles afférentes à d'autres hypersystèmes que (O).

23. Prenons maintenant L dans l'hypersystème (O), $l = 0$. Faisons d'abord $\lambda = 1$. Les formules (1) du n° 20 se réduisent à

$$\zeta_1 = 0;$$
$$\text{cl.}\,D[L] = 1;\qquad \text{cl.}\,\Delta[L] = 0;\qquad \varphi = 0.$$

L fournit à cl. D le contingent 1, à cl. Δ et à f le contingent 0.

24. Faisons enfin $\lambda > 1$; $\Delta[L]$ est définie par les $\lambda - 1$ équations

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_\lambda = 0;$$

$D[L]$ est définie par l'équation $\zeta_\lambda = 0$. Le plan $\zeta_\lambda = 0$ passe aussi par $\Delta[L]$. $D[L]$ a le degré $\lambda - 1$ et contient $\Delta[L]$, dont le degré est 1. L'intersection $\{\Delta[L], D[L]\}$ a le degré $\varphi = 1$ (n° 18). L fournit à

cl. Δ, le contingent $\lambda - 1$,
cl. D, le contingent 1,
f, Δ, le contingent 1.

25. On peut réunir les deux cas $\lambda = 1$ et $\lambda > 1$ dans une formule unique.

Introduisons un symbole $\chi(s)$ tel que

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad s \geqq 0; \\ 0 & \text{pour} \quad s < 0. \end{cases}$$

Le contingent que la matrice λ-aire L fournit à

$$\begin{aligned} \text{cl.}\,\Delta &\quad \text{est} \quad \lambda - 1, \\ \text{cl.}\,D &\quad \text{est} \quad 1, \\ f &\quad \text{est} \quad \chi(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Il vient enfin (n° 21), la sommation étant étendue aux diverses matrices partielles de l'hypersystème (O),

$$\begin{cases} r = \text{cl.}\,\Delta = \Sigma(\lambda - 1), \\ f = \Sigma\chi(\lambda - 2). \end{cases}$$

Autrement dit :

I. *Chaque matrice* L *de* (O) *réduit d'une unité le rang de* A.

II. *Si l'hypersystème* (O) *a* f *successifs multiples,* $\lambda > 1$, *les droites* D *et* Δ *ont une intersection de degré* f.

En particulier, si D et Δ ne se rencontrent pas, l'hypersystème (O) n'a que des successifs simples ou linéaires.

26. Posons $B = A^g$; calculons le rang r_1 de B ainsi que le degré f_1 de l'intersection $\{\Delta[B], D[B]\}$.

Rappelons d'abord ce qu'apprend un théorème important dû à M. Bromwich (*Theorems on matrices and bilinear forms*, in *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, t. XI), cité par M. Frobenius (*Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante*, in *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, 2 avril 1903).

Soit $(\rho - a)^\alpha$ un successif de la matrice A. Soit un po-

lynome

$$f(u) = (u-a)^{\beta}\Phi(u), \qquad \Phi(a) \neq 0;$$

prenons $b = f(a)$ et la matrice $B = f(A)$.

Divisons α par β; nommons q le quotient et $t < \beta$ le reste de l'opération. Si $\alpha < \beta$, on aurait

$$q = 0, \qquad t = \alpha < \beta.$$

B admettra : 1° t successifs $(\rho - b)^{q+1}$; 2° $\beta - t$ successifs $(\rho - b)^{q}$.

D'ailleurs

$$t(q+1) + (\beta - t)q = \beta q + t = \alpha,$$

ce qui est.

27. Faisons en particulier

$$f(u) = u^g, \qquad b = a = 0, \qquad \alpha = \lambda, \qquad \beta = g,$$
$$\lambda = qg + t, \qquad t < g.$$

B admettra t successifs ρ^{q+1} et $g - t$ successifs ρ^{q}.

Reportons-nous au n° 25. La matrice L est remplacée dans $B = A^g$ par g matrices dont chacune réduit d'une unité le rang de B.

Chacune des t matrices $(q+1)$-aires fournit $\chi(q-1)$ unités au degré f_1 de $\{D[B], \Delta[B]\}$. Chacune des $g - t$ matrices q-aires fournit à f_1 $\chi(q-2)$ unités.

En définitive :

I. *Le degré* f_1 *de* $\{D[B], \Delta[B]\}$ *est*

$$\Sigma[t\chi(q-1) + (g-t)\chi(q-2)].$$

II. *Le rang* r_1 *de* $B = A^g$ *est donné par*

$$n - r_1 = \Sigma[g\chi(\lambda - g) + \lambda\chi(-\lambda - 1 + g)].$$

En effet, chaque matrice partielle L diminue de g unités le rang de B, sans que cette réduction puisse dépasser λ.

La sommation s'étend aux différentes matrices partielles λ-aires L de l'hypersystème (O) dans A.

28. Nous sommes maintenant à même, après les généralités traitées dans la présente première Partie, d'étudier plus à fond les matrices, qui figurent dans les groupes à rang variable.



DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES D'UNE MATRICE, AYANT UN RANG DONNÉ.

CHAPITRE III.

FORMULES DE MULTIPLICATION.

29. Avant d'aborder la théorie des groupes, il est utile d'établir certaines formules d'un usage continuel dans la suite.

30. Prenons une matrice n-aire

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

et supposons $|A_{11}| \neq 0$. Le rang de A ne peut être inférieur à r.

Posons $A_{11} = a$; comme $|a| \neq 0$, on peut écrire

$$A_{12} = a\alpha_{12}, \qquad A_{21} = \alpha_{21}a,$$
$$\alpha_{12} = \text{tableau}(r,\ n-r)\text{-aire},$$
$$\alpha_{21} = \text{tableau}(n-r,\ r)\text{-aire}.$$

Désignons par a_{22} la différence des deux matrices $(n-r)$-aires, A_{22} et $\alpha_{21}a\alpha_{12}$.

On emploiera la notation

$$A = \begin{pmatrix} a & a\alpha_{12} \\ \alpha_{21}a & \alpha_{21}a\alpha_{12} + a_{22} \end{pmatrix} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}).$$

31. Parmi les n variables x on désignera les r premières par $t_1, t_2, \ldots, t_r$ et les $n-r$ suivantes par $z_1, z_2, \ldots, z_{n-r}$:

$$x_1 = t_1, \quad \ldots, \quad x_r = t_r;$$
$$x_{r+1} = z_1, \quad \ldots, \quad x_n = z_{n-r}.$$

32. Construisons la droite $\Delta = \Delta[A]$, le rang de A étant désigné par $r + \varpi$, où ϖ est un entier non négatif (n° 30).

Il faut avoir

$$o = a[t] + a\alpha_{12}[z] = a\Big[t + \alpha_{12}[z]\Big],$$
$$o = \alpha_{21}a\alpha_{12}[z] + a_{22}[z] + \alpha_{21}a[t]$$
$$= \alpha_{21}a\Big[t + \alpha_{12}[z]\Big] + a_{22}[z].$$

Comme $|a| \neq o$, on a pour équations de Δ

$$o = t + \alpha_{12}[z] = a_{22}[z].$$

Les r équations $t + \alpha_{12}[z] = o$ sont distinctes ; les $n-r$ équations $a_{22}[z] = o$ doivent se réduire à ϖ distinctes; *la matrice $(n-r)$-aire a_{22} a le rang ϖ.*

33. On va passer maintenant à la droite $D = D[A]$ de classe $n - r - \varpi$.

Les $n - r - \omega$ équations de D peuvent s'écrire

$$W[x] = V[t] + U[z] = o,$$

où

$$V = \text{tableau } (n - r - \varpi, r)\text{-aire},$$
$$U = \text{tableau } (n - r - \varpi, n - r)\text{-aire},$$
$$W = \text{tableau } (n - r - \varpi, n)\text{-aire}.$$

Il faut exprimer que, si $y = A[x]$,

$$W[y] \equiv o.$$

On a

$$o \equiv V\left[a[t] + a\,\alpha_{12}[z]\right] + U\left[\alpha_{21}\,a[t] + \alpha_{21}\,a\,\alpha_{12}[z] + a_{22}[z]\right]$$
$$= U a_{22}[z] + (V + U\alpha_{21})\,a\,\alpha_{12}[z] + (V + U\alpha_{21})\,a[t].$$

Puis

$$o \equiv (V + U\alpha_{21})\,a[t]; \qquad o = (V + U\alpha_{21})a;$$

et, puisque $|a| \neq o$,

$$V = -U\alpha_{21}.$$

Enfin

$$o \equiv U\,a_{22}[z]; \qquad U a_{22} = o.$$

Tout calcul fait, les équations de D[A] s'écrivent

$$(1) \qquad \begin{cases} U\left[z - \alpha_{21}[t]\right] = o \\ \text{avec} \\ \qquad U a_{22} = o. \end{cases}$$

34. Lemme. — *Le tableau* $(n - r - \varpi, n - r)$*-aire* U *a son rang maximum* $n - r - \varpi$; le tableau est correct.

Le système $U\,[z - \alpha_{21}(t)] = o$ représente $n - r - \varpi$ équations entre les $n - r$ inconnues

$$\xi_k = z_k - \sum_j p_{kj}\,t_j$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n - r;\ j = 1, 2, \ldots, r),$$

où α_{21} est le tableau $[p_{kj}]$. Les $n - r$ inconnues ξ_k sont distinctes. Elles doivent être liées par $n - r - \varpi$ équations distinctes, puisque D a $n - r - \varpi$ pour classe. Le rang de U est donc bien $n - r - \varpi$. Le degré de $\Delta[U]$ est

$$n - r - (n - r - \varpi) = \varpi \quad (\text{n}^\circ\ 2).$$

35. Puisque $U a_{22} = o$, on a zéro pour le rang de $U a_{22}$. Donc (théorème du n° 11) le degré de

$$\{\Delta[U],\ D[a_{22}]\},$$

droite d'un espace $\mathfrak{E}_{n-r}$, est égal au rang ϖ du second facteur a_{22}.

$\Delta[U]$ a (n° 34) le degré ϖ. D $[a_{22}]$ a aussi le degré ϖ.

L'intersection des deux droites $\Delta[U]$ et $D[a_{22}]$ a pour degré leur degré commun ϖ. Donc *les deux droites*

$$\Delta[U] \quad \text{et} \quad D[a_{22}]$$

coïncident.

D'ailleurs, si

$$\Delta[U] = D[a_{22}],$$

le degré ϖ de $D[a_{22}]$ est égal au degré $n-r-\omega$ de $\Delta[U]$, ω désignant le rang de U. On a $\varpi = n-r-\omega$ et $\omega = n-r-\varpi$.

En résumé, *la droite* $D[A]$ *est définie par le système*

$$U\big[z - \alpha_{21}[t]\big] = 0,$$

où U *est un tableau* $(n-r-\varpi, n-r)$*-aire, assujetti uniquement à avoir pour droite* $\Delta[U]$, *dans un espace* $\mathfrak{E}_{n-r}$, *la droite* $D[a_{22}]$.

36. Reprenons la matrice n-aire (n° 29)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a\alpha_{12} \\ \alpha_{21}a & \alpha_{21}a\alpha_{12} + a_{22} \end{pmatrix} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22})$$
$$(|a| \neq 0).$$

Posons

$$A = \mathcal{A} + P,$$

$$P = (0, 0, 0, a_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, 0) = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}) = \begin{pmatrix} a & a\alpha_{12} \\ \alpha_{21}a & \alpha_{21}a\alpha_{12} \end{pmatrix}.$$

Étudions les deux matrices n-aires $\mathcal{A}$ et P.

37. $\mathcal{A}$ s'obtient en faisant, dans A, $a_{22} = 0$, c'est-à-dire en supposant nul le rang ϖ de a_{22}. Le rang $r + \varpi$ de A devient le rang r dans $\mathcal{A}$.

Construisons $\Delta[\mathcal{A}]$. On a (n° 31)

$$0 = a[t] + a\alpha_{12}[z],$$
$$0 = \alpha_{21}a[t] + \alpha_{21}a\alpha_{12}[z] = \alpha_{21}a\Big[t + \alpha_{12}[z]\Big],$$

c'est-à-dire, pour $|a| \neq 0$,

$$t + \alpha_{12}[z] = 0.$$

Cela fait bien r équations distinctes.

Construisons $D[\mathcal{A}]$. Le calcul des nos 33, 34 et 35 sert, à condition de faire $a_{22} = 0$. Le tableau U, défini par $Ua_{22} = 0$, devient complètement indéterminé. Le système

$$U\Big[z - \alpha_{21}[t]\Big] = 0$$

devient

$$z - \alpha_{21}[t] = 0.$$

La classe de $D[\mathcal{A}]$ est $n - r$; le degré de $D[\mathcal{A}]$ est r, ce qui devait être.

38. Passons à P, laquelle est évidemment du même rang ϖ que a_{22}.

$\Delta[P]$ est définie par les $n - r$ équations $a_{22}[z] = 0$ qui se réduisent à ϖ distinctes. $\Delta[P]$ a bien la classe ϖ.

Pour construire $D[P]$, le calcul précédent (nos 33, 34, 35) sert encore, à condition de faire $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$.

U étant le même tableau qu'au n° 35, la droite $D[P]$ est définie par les $n - \varpi = r + (n - r - \varpi)$ équations

$$t = 0, \qquad U[z] = 0.$$

39. Considérons les trois droites

$\Delta[A]$ (n° 32),	$0 = t + a_{12}[z] = a_{22}[z]$,
$\Delta[\mathcal{A}]$ (n° 37),	$0 = t + \alpha_{12}[z]$,
$\Delta[P]$ (n° 38),	$0 = a_{22}[z]$.

$\Delta[A]$ est évidemment l'intersection

$$\{\Delta[\mathcal{A}],\ \Delta[P]\}.$$

40. Considérons les trois droites

$$\begin{array}{ll} D[A]\ (\text{n}^\circ\ 35), & U\big[z - \alpha_{21}[t]\big] = 0, \\ D[\mathcal{A}]\ (\text{n}^\circ\ 37), & z - \alpha_{21}[t] = 0, \\ D[P]\ (\text{n}^\circ\ 38), & t = U[z] = 0. \end{array}$$

$D[\mathcal{A}]$ et $D[P]$ sont situées l'une et l'autre sur $D[A]$. Le degré $r + \varpi$ de $D[A]$ *est la somme*

du degré r de $D[\mathcal{A}]$,
du degré ϖ de $D[P]$.

Les deux droites $D[\mathcal{A}]$ et $D[P]$ ne se rencontrent pas, car la seule solution du système

$$0 = z - \alpha_{21}[t] = t = U[z]$$

est

$$z = t = x = 0.$$

Finalement $D[A]$ est *la somme* (n° 10, Chapitre II, Préliminaires)

$$D[\mathcal{A}] + D[P].$$

41. Soient deux matrices de la forme indiquée au n° 30

$$\begin{array}{ll} A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) & (|a| \neq 0), \\ B = (b, \beta_{12}, \beta_{21}, b_{22}) & (|b| \neq 0). \end{array}$$

On construira le produit

$$C = BA = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

en supposant $|C_{11}| \neq 0$, de façon qu'on puisse encore écrire

$$C = (c, \gamma_{12}, \gamma_{21}, c_{22}).$$

Il viendra successivement

$$C_{11} = c = B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = ba + b\beta_{12}\alpha_{21}a = b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a$$
$$(e_r = r\text{-aire unité}),$$

et

$$C_{12} = c\gamma_{12} = B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = ba\alpha_{12} + b\beta_{12}\alpha_{21}a\alpha_{12} + b\beta_{12}\alpha_{22}$$
$$= b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a\alpha_{12} + b\beta_{12}a_{22},$$

$$C_{21} = \gamma_{21}c = B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = \beta_{21}ba + \beta_{21}b\beta_{12}\alpha_{21}a + b_{22}\alpha_{21}a$$
$$= \beta_{21}b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a + b_{22}\alpha_{21}a,$$

$$C_{22} = \gamma_{21}c\gamma_{12} + c_{22}$$
$$= B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22}$$
$$= \beta_{21}ba\alpha_{12} + \beta_{21}b\beta_{12}\alpha_{21}a\alpha_{12} + b_{22}\alpha_{21}a\alpha_{12} + \beta_{21}b\beta_{12}a_{22} + b_{22}a_{22}$$
$$= b_{22}a_{22} + b_{22}\alpha_{21}a\alpha_{12} + \beta_{21}b\beta_{12}a_{22} + \beta_{21}b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a\alpha_{12}.$$

42. Comme $|c| \neq 0$, on a aussi $|\theta| \neq 0$, θ désignant la r-aire $\theta = e_r + \beta_{12}\alpha_{21}$. Désignons par η la $(n-r)$-aire

$$\eta = e_{n-r} + \alpha_{21}\beta_{12}, \qquad e_{n-r} = (n-r)\text{-aire unité},$$

et par ζ la $(n-r)$-aire

$$\zeta = e_{n-r} - \alpha_{21}\theta^{-1}\beta_{12}.$$

Le produit $\zeta\eta$ est

$$(e_{n-r} - \alpha_{21}\theta^{-1}\beta_{12})(e_{n-r} + \alpha_{21}\beta_{12})$$
$$= e_{n-r} + \alpha_{21}\beta_{12} - \alpha_{21}\theta^{-1}(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})\beta_{12} = e_{n-r}.$$

Alors

$$|\eta| \neq 0, \qquad \zeta = \eta^{-1}.$$

43. Les formules du n° 41 donnent

$$c = b\theta a, \qquad \gamma_{12} = \alpha_{12} + c^{-1}b\beta_{12}a_{22},$$
$$\gamma_{21} = \beta_{21} + b_{22}\alpha_{21}ac^{-1},$$
$$c_{22} = b_{22}a_{22} + \beta_{21}c\alpha_{12} + b_{22}\alpha_{21}a\alpha_{12} + \beta_{21}b\beta_{12}a_{22}$$
$$-(\beta_{21} + b_{22}\alpha_{21}ac^{-1})c(\alpha_{12} + c^{-1}b\beta_{12}a_{22})$$
$$= b_{22}a_{22} - b_{22}\alpha_{21}ac^{-1}b\beta_{12}a_{22}$$
$$= b_{22}(e_{n-r} - \alpha_{21}\theta^{-1}\beta_{12})a_{22}$$

et, sous le bénéfice du n° 42,

$$c_{22} = b_{22}\eta^{-1}a_{22}.$$

44. Les formules définitives seront

$$
(\text{o}) \quad \left\{
\begin{array}{c}
\text{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}), \qquad \text{B} = (b, \beta_{12}, \beta_{21}, b_{22}), \\
\text{C} = \text{BA} = (c, \gamma_{12}, \gamma_{21}, c_{22}); \\
\theta = e_r + \beta_{12}\alpha_{21}, \qquad |\theta| \neq 0, \qquad \eta = e_{n-r} + \alpha_{21}\beta_{12}; \\
|a| \neq 0; \qquad |b| \neq 0; \\
c = b\theta a, \qquad c_{22} = b_{22}\eta^{-1}a_{22}; \\
\gamma_{12} = \alpha_{12} + (\theta a)^{-1}\beta_{12}a_{22}, \\
\gamma_{21} = \beta_{21} + b_{22}\alpha_{21}(b\theta)^{-1}.
\end{array}
\right.
$$

On les emploiera constamment dans la suite.

45. Faisons en particulier

$$a_{22} = b_{22} = 0, \qquad \text{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \qquad \text{B} = (b, \beta_{12}, \beta_{21}).$$

Alors $c_{22} = 0$ et finalement, grâce aux formules du n° 44, il vient la relation importante

$$(b, \beta_{12}, \beta_{21})(a, \alpha_{12}, \alpha_{21}) = (b\theta a, \alpha_{12}, \beta_{21}),$$

dont je ferai aussi largement usage.

46. Il convient maintenant d'examiner dans quelle mesure les formules précédentes sont indépendantes du choix des coordonnées.



CHAPITRE IV.

CHANGEMENTS DE COORDONNÉES; PROJECTIVITÉ.

47. Les matrices n-aires

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r & n-r \end{matrix}$$

étudiées dans le précédent Chapitre et qui jouent un rôle important dans la suite, ont la propriété d'avoir $|A_{11}| \neq 0$.

Je vais étudier la collinéation S telle que $S^{-1}AS$ ne perde pas la propriété indiquée. C'est afin de rendre, dans la mesure du possible, la théorie précédente *projective*, c'est-à-dire indépendante du choix des variables.

Parmi les matrices de rang $r + \varpi$

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}),$$

nous avons distingué les matrices (nº 36)

$$\mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, 0) = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21})$$

de rang r.

On doit donc avoir, puisque la distinction précédente est forcément projective,

$$B = S^{-1}AS = (b, \beta_{12}, \beta_{21}, b_{22}),$$
$$\mathcal{B} = S^{-1}\mathcal{A}S = (b, \beta_{12}, \beta_{21}).$$

48. Prenons d'abord

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad 0 = S_{12} = S_{21}.$$

On voit facilement que

$$S^{-1}AS = (S_{11}^{-1} a S_{11}, S_{11}^{-1}\alpha_{12}S_{22}, S_{22}^{-1}\alpha_{21}S_{11}, S_{22}^{-1}a_{22}S_{22});$$

d'ailleurs

$$|S| = |S_{11}||S_{22}| \neq 0, \qquad |S_{11}| \neq 0, \qquad |S_{22}| \neq 0.$$

Je considérerai une pareille transformation comme indifférente et j'en ferai abstraction.

49. Soit maintenant

$$\mathfrak{B} = S^{-1}\mathfrak{A}S \quad (n^o\ 47)$$

avec (*voir* Chapitre précédent)

$$\begin{array}{ll} \Delta[\mathfrak{A}] & t + \alpha_{12}[z] = 0, \\ D[\mathfrak{A}] & z - \alpha_{21}[t] = 0, \\ \Delta[\mathfrak{B}] & t + \beta_{12}[z] = 0, \\ D[\mathfrak{B}] & z - \beta_{21}[t] = 0. \end{array}$$

S, qui doit changer $\Delta[\mathfrak{A}]$ en $\Delta[\mathfrak{B}]$, change le système

$$t + \alpha_{12}[z] = 0$$

en le système

$$0 = (S_{11} + \alpha_{12}S_{21})[t] + (S_{12} + \alpha_{12}S_{22})[z],$$

équivalent à

$$t + \beta_{12}[z] = 0.$$

Donc

(1) $$|S_{11} + \alpha_{12}S_{21}| \neq 0.$$

S, qui doit changer $D[\mathfrak{A}]$ en $D[\mathfrak{B}]$, change le système

$$z - \alpha_{21}[t] = 0$$

en le système équivalent

$$0 = (S_{21} - \alpha_{21}S_{11})[t] + (S_{22} - \alpha_{21}S_{12})[z].$$

Donc

(2) $$|S_{22} - \alpha_{21}S_{12}| \neq 0.$$

Enfin

$$\beta_{12} = (S_{11} + \alpha_{12} S_{21})^{-1} (S_{12} + \alpha_{12} S_{22}),$$
$$-\beta_{21} = (S_{22} - \alpha_{21} S_{12})^{-1} (S_{21} - \alpha_{21} S_{11}).$$

50. Supposons (et c'est la seule hypothèse restrictive de la généralité) que, parmi les matrices $\mathcal{A}$ à transformer par S, figure au moins une où

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \qquad \mathcal{A} = (a, 0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ 67).$$

51. Alors les conditions (1) et (2) du n° 49 donnent

$$|S_{11}| \neq 0, \qquad |S_{22}| \neq 0.$$

Comme $|S_{11}| \neq 0$, la matrice S est elle-même de la nature indiquée au n° 47, pour A. On peut écrire

$$S_{12} = S_{11} u, \qquad S_{21} = - S_{22} v,$$
$$u = \text{tableau } (r, n-r)\text{-aire}, \qquad e_r \;= r\text{-aire unité},$$
$$v = \text{tableau } (n-r, r)\text{-aire}, \qquad e_{n-r} = (n-r)\text{-aire unité},$$
$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r & u \\ -v & e_{n-r} \end{pmatrix}.$$

La présence de la matrice

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$$

est indifférente (n° 48). Il suffira donc de faire

$$S = \Phi = \begin{pmatrix} e_r & u \\ -v & e_{n-r} \end{pmatrix}.$$

52. Nommons respectivement θ et η les matrices r-aire et $(n-r)$-aire

$$\theta = e_r + uv, \qquad \eta = e_{n-r} + vu.$$

Je dis que $|\theta| \neq 0$.

Posons

$$x' = \Phi[x].$$

Comme $|\Phi| \neq 0$ par hypothèse, on doit pouvoir résoudre par rapport aux coordonnées du point x. Sous le bénéfice du n° 31, on aura

$$t' = t + u[z], \qquad z' = z - v[t].$$

De là

$$z = z' + v[t],$$
$$t' = t + uv[t] + u[z'] = u[z'] + (e_r + uv)[t] = u[z'] + \theta[t].$$

On doit pouvoir résoudre par rapport aux t et $|\theta| \neq 0$.

On a aussi $t = t' - u[z]$; puis

$$v[t'] + z' = z + vu[z] = (e_{n-r} + vu)[z] = \eta[z]$$

et

$$|\eta| \neq 0.$$

On vérifie, par un calcul facile, que

$$(1) \quad \begin{cases} u\eta = \theta u, & v\theta = \eta v, \\ \eta^{-1} = e_{n-r} - v\theta^{-1}u, & \theta^{-1} = e_r - u\eta^{-1}v. \end{cases}$$

53. Posons

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix} = W, \qquad T = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \qquad |T| \neq 0,$$
$$WT = \begin{pmatrix} 0 & u\eta \\ -v\theta & 0 \end{pmatrix} = TW = \begin{pmatrix} 0 & \theta u \\ -\eta v & 0 \end{pmatrix}$$

sous le bénéfice des formules (1) du n° 52. W et T sont échangeables. Si E désigne la n-aire unité, on a

$$W^2 = \begin{pmatrix} -uv & 0 \\ 0 & -vu \end{pmatrix} = E - T,$$
$$T = E - W^2 = (E - W)(E + W).$$

Je dis que, puisque $\Phi = E + W$, $\Phi^{-1} = T^{-1}(E - W)$. En effet,

$$(E + W)T^{-1}(E - W) = T^{-1}(E - W^2) = E.$$

54. Nous sommes maintenant à même de calculer la

matrice

$$L = (l, \lambda_{12}, \lambda_{21}, l_{22}) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

telle que

$$L = \Phi A \Phi^{-1},$$

où

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

55. On a, eu égard au n° 53,

$$L = \Phi A \Phi^{-1} = (E + W) A T^{-1} (E - W) = (E + W) A (E - W) T^{-1},$$
$$A = \Phi^{-1} L \Phi = T^{-1} (E - W) L (E + W),$$

puis

$$LT = (E + W) A (E - W) = A - AW + WA - WAW,$$
$$TA = (E - W) L (E + W) = L + LW - WL - WLW.$$

Or

$$-AW = \begin{pmatrix} A_{12} v & -A_{11} u \\ A_{22} v & -A_{21} u \end{pmatrix}, \qquad WA = \begin{pmatrix} u A_{21} & u A_{22} \\ -v A_{11} & -v A_{12} \end{pmatrix},$$
$$-WAW = \begin{pmatrix} u A_{22} v & -u A_{21} u \\ -v A_{12} v & v A_{11} u \end{pmatrix},$$

. . . .

De là, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} L_{11}\theta &= A_{11} + A_{12} v + u A_{21} + u A_{22} v, \\ L_{12}\eta &= - A_{11} u + A_{12} - u A_{21} u + u A_{22}, \\ L_{21}\theta &= - v A_{11} - v A_{12} v + A_{21} + A_{22} v, \\ L_{22}\eta &= v A_{11} u - v A_{12} - A_{21} u + A_{22} \end{aligned}$$

et, changeant le signe de u et v, c'est-à-dire le signe de W,

$$\begin{aligned} \theta A_{11} &= L_{11} - L_{12} v - u L_{21} + u L_{22} v, \\ \theta A_{12} &= L_{11} u + L_{12} - u L_{21} u - u L_{22}, \\ \eta A_{21} &= v L_{11} - v L_{12} v + L_{21} - L_{22} v, \\ \eta A_{22} &= v L_{11} u + v L_{12} + L_{21} u + L_{22}. \end{aligned}$$

56. Remplaçons $A_{11}, \ldots, L_{22}$ par leurs valeurs; il viendra

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} l\theta = u a_{22} v + (e_r + u\alpha_{21}) a (e_r + \alpha_{12} v), \\ l\lambda_{12}\eta = u a_{22} + (e_r + u\alpha_{21}) a (\alpha_{12} - u), \\ \lambda_{21} l\theta = a_{22} v + (\alpha_{21} - v) a (e_r + \alpha_{12} v), \\ l_{22}\eta + \lambda_{21} l \lambda_{12}\eta = a_{22} + (\alpha_{21} - v) a (\alpha_{12} - u); \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \theta a = u l_{22} v + (e_r - u\lambda_{21}) l (e_r - \lambda_{12} v), \\ \theta a \alpha_{12} = - u l_{22} + (e_r - u\lambda_{21}) l (\lambda_{12} + u), \\ \eta\alpha_{21} a = - l_{22} v + (\lambda_{21} + v) l (e_r - \lambda_{12} v), \\ \eta a_{22} + \eta\alpha_{21} a \alpha_{12} = l_{22} + (\lambda_{21} + v) l (\lambda_{12} + u). \end{cases}$$

Les relations (I) et (II) sont réciproques; résolues, les premières par rapport à L, les secondes par rapport à A.

57. Si l'on veut des relations où A et L figurent d'une façon analogue, on partira de l'égalité

$$L\Phi = L(E + W) = \Phi A = (E + W) A,$$
$$L + LW = A + WA,$$
$$LW = \begin{pmatrix} -L_{12} v & L_{11} u \\ -L_{22} v & L_{21} u \end{pmatrix}, \qquad WA = \begin{pmatrix} u A_{21} & u A_{22} \\ -v A_{11} & -v A_{12} \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned} L_{11} - L_{12} v &= A_{11} + u A_{21}, \\ L_{12} + L_{11} u &= A_{12} + u A_{22}, \\ L_{21} - L_{22} v &= A_{21} - v A_{11}, \\ L_{22} + L_{21} u &= A_{22} - v A_{12}. \end{aligned}$$

Remplaçons $A_{11}, \ldots, L_{22}$ par leurs valeurs; on a les relations cherchées :

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} l(e_r - \lambda_{12} v) = (e_r + u\alpha_{21}) a, \\ l(\lambda_{12} + u) = (e_r + u\alpha_{21}) a \alpha_{12} + u a_{22}, \\ - l_{22} v + \lambda_{21} l (e_r - \lambda_{12} v) = (\alpha_{21} - v) a, \\ l_{22} + \lambda_{21} l (\lambda_{12} + u) = a_{22} + (\alpha_{21} - v) a \alpha_{12}. \end{cases}$$

58. Les deux tableaux u et v ne peuvent être pris tout à fait au hasard, car il faut que les r-aires a et l, qui figurent

dans les formules (I), (II) et (III), aient $|a| \neq 0$, $|l| \neq 0$, sans parler déjà de

$$|\theta| = |e_r + uv| \neq 0.$$

59. La décomposition (n° 36) $A = \mathcal{A} + P$,

$$\mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \qquad P = (0, 0, 0, a_{22}),$$

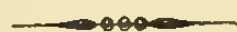
n'est pas projective (n° 47). Si en effet

$$B = \Phi^{-1} A \Phi, \qquad B = \mathcal{B} + Q,$$
$$\mathcal{B} = (b, \beta_{12}, \beta_{21}), \qquad Q = (0, 0, 0, b_{22}),$$

on n'a pas, en général,

$$\mathcal{B} = \Phi^{-1} \mathcal{A} \Phi, \qquad Q = \Phi^{-1} P \Phi.$$

60. On trouvera au n° 95 une application de ces formules et des théories du présent Chapitre.



TROISIÈME PARTIE.

GROUPES A NOYAU.

CHAPITRE V.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU GROUPE-NOYAU.

61. Prenons un système Ω, constitué par des matrices n-aires A, B, ..., en nombre fini ou infini.

Ω devient un *groupe* $\mathfrak{G}$, si tout produit AB est aussi dans Ω.

62. Soit ρ un entier, $0 \leqq \rho \leqq n$. Les matrices du groupe $\mathfrak{G}$, dont le rang ne surpasse pas ρ, forment un système G_ρ. Je dis que G_ρ *est un groupe*.

En effet, prenons dans G_ρ deux matrices A et B. On a

$$\text{Rg.A} \leqq \rho, \qquad \text{Rg.B} \leqq \rho.$$

Or (Chap. I), si $C = BA$,

$$\text{Rg.C} \leqq \text{Rg.A}, \qquad \text{Rg.C} \leqq \text{Rg.B}, \qquad \text{Rg.BA} \leqq \rho.$$

C. Q. F. D.

63. Soit T une matrice de G_ρ. Prenons dans $\mathfrak{G}$, soit dans G_ρ, soit en dehors de G_ρ, une matrice S. On a évidemment

$$\text{Rg.TS} \leqq \rho, \qquad \text{Rg.ST} \leqq \rho.$$

Donc G_ρ *contient chacun des deux produits* TS *et* ST.

64. Nommons r le rang minimum que puissent posséder les matrices de $\mathfrak{G}$. Le groupe $G = G_r$ sera exclusivement constitué par des matrices de rang r.

G sera dit le *noyau* du groupe $\mathfrak{G}$.

Si $\mathfrak{G}$ contient la matrice zéro, de rang nul, cette matrice constitue à elle seule le noyau. Je dirai alors que le noyau *manque*.

Si $\mathfrak{G}$ ne contient pas la matrice zéro, $\mathfrak{G}$ sera dit *un groupe à noyau*.

Les présentes recherches sont consacrées aux groupes à noyau.

La proposition du n° 63 est d'ailleurs vraie pour tout groupe G_r de rang minimum r, peu importe que $r = 0$ ou $r > 0$.

ST et TS ont le rang r et sont situées dans G_r.

65. Prenons un groupe $\mathfrak{G}$, muni d'un noyau G, de rang r.

G sera un groupe à rang fixe. Dans la suite de ce Mémoire seront construits les groupes de rang fixe.

Pour l'instant, je suppose connu le noyau G et j'examine comment se comportent réciproquement $\mathfrak{G}$ et G.

66. Dans le noyau G prenons une matrice quelconque N. N^2 est située dans G et a le rang r. Les deux droites $D[N]$ et $\Delta[N]$ ne se rencontrent pas (théorème du n° 11), puisque l'intersection $\{\Delta[N], D[N]\}$ doit avoir le degré zéro. Mais alors (n° 25) l'hypersystème (O) de N n'a que des successifs simples ou linéaires.

Mettons N sous forme typique

$$N = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où la r-aire ν a son $|\nu| \neq 0$.

Si A est une matrice de $\mathfrak{G}$ appartenant ou non au noyau, $\mathfrak{G}$ contiendra la matrice NAN, laquelle (n° 63) figure dans G.

Si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad NAN = \begin{pmatrix} \nu A_{11} \nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

NAN a le rang r et

$$|\nu A_{11} \nu| \neq 0.$$

Puis

$$|A_{11}| = 0.$$

Ainsi, *toute matrice d'un groupe à noyau appartient à la catégorie étudiée dans la deuxième Partie.*

On a

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}).$$

Les matrices

$$(a, \alpha_{12}, \alpha_{21}),$$

où le rang est r, avec $a_{22} = 0$, sont précisément les matrices du noyau.

67. Désignons par

$$\Delta_\sigma \quad \text{et} \quad D_\tau \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots; \tau = 0, 1, \ldots)$$

les diverses droites (de degré $n - r$ et r respectivement) Δ et D, qui figurent dans le noyau G.

L'expression générale $(a, \alpha_{12}, \alpha_{21})$ des matrices de G donne N pour

$$a = \nu, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.$$

On écrira

$$\Delta_0 = \Delta[N], \qquad D_0 = D[N].$$

Δ_0 a (n° 31) pour équations $t = 0$. D_0 a pour équations $z = 0$.

Parmi les matrices $(a, \alpha_{12}, \alpha_{21})$ à transformer par la collinéation S du n° 50, figure au moins N, où $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. L'hypothèse restrictive faite au n° 50 est donc légitime dans la présente théorie. Tous les résultats obtenus au Chapitre IV subsistent.

68. Soit A une matrice de $\mathfrak{G}$, non située dans G. Si, comme au n° 36, on pose

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) = \mathcal{A} + P,$$
$$\mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \qquad P = (0, 0, 0, a_{22}),$$

il vient la proposition suivante : *Les deux droites* $\Delta[\mathcal{A}]$ *et* $D[\mathcal{A}]$ *figurent parmi les droites* Δ_σ *et* D_τ *respectivement* (n° 67), *qui appartiennent aux matrices du noyau.*

Voici comment on s'en assure.

$\Delta[\mathcal{A}]$ est donnée (n° 37) par le système

$$0 = t + \alpha_{12}[z].$$

Or G contient la matrice

$$NA = (\nu a, \alpha_{12}, 0)$$

dont la $\Delta[NA]$ est aussi donnée par le système

$$t + \alpha_{12}[z] = 0.$$

$\Delta[\mathcal{A}]$ est donc une certaine Δ_σ.

De même G contient $AN = (a\nu, 0, \alpha_{21})$. $D[\mathcal{A}]$ et $D[AN]$ sont données toutes deux par le même système (n° 37)

$$z - \alpha_{21}[t] = 0.$$

$D[\mathcal{A}]$ est donc une certaine D_τ.

C. Q. F. D.

69. Admettons enfin (ce qui n'a pas lieu forcément) que G possède au moins une matrice U dont le déterminant caractéristique admette r successifs linéaires $\rho - 1$ et $n - r$ successifs linéaires ρ

$$|\rho E - U| = (\rho - 1)\ldots(\rho - 1).\rho.\rho\ldots\rho;$$

U mise sous forme typique sera

$$U = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_r = r\text{-aire unité.}$$

Soit alors

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) = \mathcal{A} + P$$

une matrice quelconque de $\mathfrak{G}$. Le noyau G contiendra la matrice

$$UAU = (a, o, o).$$

Donc *la r-aire a, qui figure dans* $\mathcal{A}$, *figure aussi dans une au moins des matrices de* G.

70. Nous allons maintenant étudier de plus près la structure du noyau lui-même.



CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES GROUPES QUI SE CONFONDENT AVEC LEUR NOYAU.

---

71. Nous allons construire le groupe $\mathfrak{G}$ qui se confond avec son noyau G. Autrement dit, vont être construits les groupes à rang fixe r.

Soient A, B, ... les diverses matrices de G, toutes de rang r.

72. Théorème. — *On a*

$$D[BA] = D[B], \qquad \Delta[BA] = \Delta[A].$$

En effet (théorèmes des nos 14 et 15), D[BA] est contenu dans D[B] tout en ayant le même degré r que D[B]. Δ[BA] contient Δ[A], tout en ayant la même classe r. Donc

$$D[BA] = D[B], \qquad \Delta[BA] = \Delta[A].$$

C. Q. F. D.

Prenons, comme au n° 67, les diverses droites Δ_σ et D_τ de G.

Corollaire I. — *Choisissons à volonté la combinaison* Δ_σ *et* D_τ. G *contiendra au moins une matrice* C, *telle que*

$$\Delta_\sigma = \Delta[C], \qquad D_\tau = D[C].$$

En effet, prenons dans G (ce qui est possible par hypothèse)

Une B telle que $D[B] = D_\tau$,

Une A telle que $\Delta[A] = \Delta_\sigma$.

G contiendra le produit $BA = C$ et

$$D[C] = D[B] = D_\tau, \qquad \Delta[C] = \Delta[A] = \Delta_\sigma.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — *Toutes les matrices qui admettent une même* Δ_σ *pour* Δ *forment un groupe* g_σ, *contenu dans* G.

C'est évident d'après le théorème; il en est de même pour les corollaires suivants.

Corollaire III. — *Toutes les matrices qui admettent pour leur* D *une même* D_τ *forment un groupe* h_τ, *contenu dans* G.

Corollaire IV. — *Toutes les matrices qui admettent une même* Δ_σ *et une même* D_τ *pour leur* D *et leur* Δ *forment un groupe* $G_{\sigma\tau}$.

$G_{\sigma\tau}$ est constitué par les matrices communes à g_σ et à h_τ.

72 *bis*. Théorème. — *Aucune* Δ_σ *ne rencontre aucune* D_τ.

Soient B, avec $\Delta[B] = \Delta_\sigma$, et A, avec $D[A] = D_\tau$. Si Δ_σ et D_τ se rencontraient, le produit BA aurait (théorème du n° 11) un rang inférieur à r, ce qui est absurde.

Dans G figure la matrice N (n° 66), mise sous forme typique, avec (n° 67)

$$\Delta[N] = \Delta_0, \qquad t = 0,$$
$$D[N] = D_0, \qquad z = 0.$$

La droite Δ_σ a pour équations

$$p_\sigma[t] + q_\sigma[z] = 0,$$

où

$$q_\sigma = \text{tableau } (r, n-r)\text{-aire},$$
$$p_\sigma = \text{matrice } r\text{-aire}.$$

Δ_σ ne rencontre pas D_0, donnée par le système $z = 0$. Les r équations

$$p_\sigma[t] = 0$$

ne peuvent être satisfaites que pour $t=0$ (sans quoi D_0 et Δ_σ se rencontreraient). Donc

$$|p_\sigma| \neq 0;$$

Δ_σ est donnée par le système

$$0 = t + u_\sigma[z], \qquad u_\sigma = p_\sigma^{-1} q_\sigma.$$

D_τ est donnée par le système

$$c_\tau[t] + d_\tau[z] = 0,$$
$$d_\tau = \text{matrice } (n-r)\text{-aire},$$
$$c_\tau = \text{tableau } (n-r, r)\text{-aire}.$$

D_τ ne rencontre pas Δ_0, ou $t=0$. Encore $|d_\tau| \neq 0$. D_τ est donnée par le système

$$z - v_\tau[t] = 0, \qquad -v_\tau = d_\tau^{-1} c_\tau.$$

73. Prenons

Δ_σ, donnée par le système $t + u_\sigma[z] = 0$,
D_τ, » $z - v_\tau[t] = 0$.

Cherchons les solutions communes aux deux systèmes. On a

$$0 = t + u_\sigma v_\tau[t] = (e_r + u_\sigma v_\tau)[t],$$
$$0 = z + v_\tau u_\sigma[z] = (e_{n-r} + v_\tau u_\sigma)[z].$$

Comme D_τ et Δ_σ ne se rencontrent pas, la seule solution commune est $z = t = 0$.

Ainsi la $(n-r)$-aire

$$\eta_{\tau\sigma} = e_{n-r} + v_\tau u_\sigma$$

et la r-aire

$$\theta_{\sigma\tau} = e_r + u_\sigma v_\tau$$

donnent

$$|\theta_{\sigma\tau}| \neq 0, \qquad |\eta_{\tau\sigma}| \neq 0.$$

On démontrera comme au n° 52 que

$$\eta_{\tau\sigma}^{-1} = e_{n-r} - v_\tau \theta_{\sigma\tau}^{-1} u_\sigma,$$
$$\theta_{\sigma\tau}^{-1} = e_r - u_\sigma \eta_{\tau\sigma}^{-1} v_\tau,$$
$$u_\sigma \eta_{\tau\sigma} = \theta_{\sigma\tau} u_\sigma, \qquad v_\tau \theta_{\sigma\tau} = \eta_{\tau\sigma} v_\tau.$$

74. On voit immédiatement que, si

$$D_\tau = D[A], \qquad \Delta_\sigma = \Delta[A],$$

on a

$$A = (\ldots, u_\sigma, v_\tau).$$

Soit une matrice quelconque $A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21})$ de G. Il est facile de la mettre sous forme typique.

Prenons, en effet, les formules (I) du n° 56. Faisons-y

$$a_{22} = 0, \qquad u = \alpha_{12}, \qquad v = \alpha_{21}.$$

Il viendra

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = l_{22} = 0, \qquad l = \theta a;$$

L est sous forme typique. D'après le n° 55,

$$A = \Phi^{-1} L \Phi, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} e_r & \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & e_{n-r} \end{pmatrix},$$
$$L = \begin{pmatrix} \theta a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$|\Phi| \neq 0$, puisque, les deux droites $D[A]$ et $\Delta[A]$ ne se rencontrant pas, on a

$$|e_r + \alpha_{12}\alpha_{21}| \neq 0.$$

75. Donnons-nous l'indice σ et l'indice τ, c'est-à-dire choisissons A dans un groupe donné $G_{\sigma\tau}$ (corollaire IV du n° 71). Les matrices de $G_{\sigma\tau}$ peuvent être numérotées suivant un troisième indice μ et désignées par la notation

$$A_{\sigma\tau\mu} = (a_{\sigma\tau\mu}, u_\sigma, v_\tau).$$

D'après le n° 74, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\sigma\tau\mu} = \Phi_{\sigma\tau}^{-1} L_{\sigma\tau\mu} \Phi_{\sigma\tau}, \\ \Phi_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} e_r & u_\sigma \\ -v_\tau & e_{n-r} \end{pmatrix}, \qquad L_{\sigma\tau\mu} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{\sigma\tau\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{a}_{\sigma\tau\mu} = \theta_{\sigma\tau} a_{\sigma\tau\mu}, \qquad \theta_{\sigma\tau} = e_r + u_\sigma v_\tau. \end{array} \right.$$

Les matrices $L_{\sigma\tau\mu}$ *forment un groupe* $L_{\sigma\tau}$, *lequel est isomorphe sans hémiédrie au groupe* $\Gamma_{\sigma\tau}$, *r-aire*, ordinaire

(c'est-à-dire à matrices de déterminant non nul) dérivé des $\mathrm{a}_{\sigma\tau\mu}$.

Le groupe n-aire $L_{\sigma\tau}$ *est semblable au groupe* $G_{\sigma\tau}$, *la collinéation de similitude étant* $\Phi_{\sigma\tau}$.

C'est ce qui résulte immédiatement des formules (1).

76. La connaissance du groupe G est assurée dès qu'on possède les droites Δ_σ et D_τ, ainsi que tous les groupes r-aires ordinaires $\Gamma_{\sigma\tau}$.

En effet, on possède alors les u_σ, les v_τ, les matrices

$$\theta_{\sigma\tau} = e_r + u_\sigma v_\tau,$$

les matrices $\mathrm{a}_{\sigma\tau\mu}$ et enfin les matrices $a_{\sigma\tau\mu} = \theta_{\sigma\tau}^{-1}\,\mathrm{a}_{\sigma\tau\mu}$.

Les groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$ sont d'ailleurs fort loin d'être indépendants les uns des autres.

77. Je passe maintenant à la *divisibilité* des matrices dans G, c'est-à-dire à la résolution de l'équation

$$AX = B \qquad \text{ou} \qquad XA = B.$$

Posons

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \qquad B = (b, \beta_{12}, \beta_{21})$$

et désignons la matrice inconnue par

$$X = (x, \xi_{12}, \xi_{21}),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{matrice } r\text{-aire} \\ \xi_{12} = \text{tableau } (r, n-r)\text{-aire} \\ \xi_{21} = \text{tableau } (n-r, r)\text{-aire} \end{array}\right\} \text{inconnus.}$$

Les formules du n° 45 donnent

$$B = AX = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21})(x, \xi_{12}, \xi_{21}) = (a(e_r + \alpha_{12}\xi_{21})x, \xi_{12}, \alpha_{21})$$

ou

$$B = XA = (x, \xi_{12}, \xi_{21})(a, \alpha_{12}, \alpha_{21}) = (x(e_r + \xi_{12}\alpha_{21})a, \alpha_{12}, \xi_{21}).$$

L'identification donne

$$\left.\begin{array}{l} b = a(e_r + \alpha_{12}\xi_{21})x \\ \xi_{12} = \beta_{12}, \qquad \alpha_{21} = \beta_{21} \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} b = x(e_r + \xi_{12}\alpha_{21})a \\ \beta_{12} = \alpha_{12}, \qquad \beta_{21} = \xi_{21}. \end{array}\right.$$

Il faut donc que A et B appartiennent au même groupe h_τ (ou au même groupe g_σ). X doit appartenir au même groupe g_σ (ou au même groupe h_τ) que B. Donnons-nous le groupe h_σ (ou le groupe g_σ). Alors le tableau ξ_{21} (ou le tableau ξ_{12}) est connu ainsi que la r-aire $e_r + \alpha_{12}\xi_{12}$ (ou la r-aire $e_r + \xi_{12}\alpha_{21}$). Puis il vient

$$x = (e_r + \alpha_{12}\xi_{21})^{-1}a^{-1}b \qquad \text{ou} \qquad x = ba^{-1}(e_r + \xi_{12}\alpha_{21})^{-1}.$$

La valeur ainsi calculée de x est unique. X existe ou non suivant que la matrice ainsi construite figure ou manque dans G. D'où un théorème :

78. Théorème. — *Pour que l'équation* AX = B (*ou* XA = B) *soit résoluble dans* G, *il faut que* A *et* B *appartiennent à un même groupe* h_τ (*ou à un même groupe* g_σ). X, *si elle existe, appartient à un même groupe* g_σ (*ou à un même groupe* h_τ) *que* B. *Il y a alors, dans chaque groupe* h_τ (*ou dans chaque groupe* g_σ), *une ou aucune solution* X, *laquelle, si elle existe, se construit par un procédé univoque.*

79. Voilà un exemple des éventualités signalées au n° 16.



CHAPITRE VII.

CONSTRUCTION DES GROUPES QUI SE CONFONDENT AVEC LEUR NOYAU.

---

80. Approfondissons les relations mutuelles des groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$ (nº 76). Soit la matrice

$$A_{\sigma\tau\mu} = (a_{\sigma\tau\mu},\ u_\sigma,\ v_\tau).$$

Prenons la matrice r-aire correspondante

$$\mathfrak{a}_{\sigma\tau\mu} = (e_r + u_\sigma v_\tau)\, a_{\sigma\tau\mu} = \theta_{\sigma\tau} a_{\sigma\tau\mu},$$

$$a_{\sigma\tau\mu} = \theta_{\sigma\tau}^{-1}\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau\mu}.$$

Posons

$$A_{\sigma\tau\mu} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad a_{\sigma\tau\mu} = a \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}_{\sigma\tau\mu} = \mathfrak{a} \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Les relations du nº 45 deviennent immédiatement, pour $C = BA$, les suivantes : la relation

$$\gamma_{12} = \alpha_{12}, \qquad \gamma_{21} = \beta_{21}$$

se traduit par

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma' \\ \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau' \\ \sigma \\ \mu'' \end{pmatrix},$$

en posant

$$B = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma' \\ \mu' \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \tau' \\ \sigma \\ \mu'' \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ \mu \end{pmatrix};$$

la relation $c = b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a$ se traduit par

(2) $$a\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\\ \mu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}\theta_{\sigma'\tau'}\, a\begin{pmatrix}\tau'\\ \sigma\\ \mu''\end{pmatrix};$$

enfin

(3) $$a\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\\ \mu\end{pmatrix} = \theta_{\sigma\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\\ \mu\end{pmatrix}.$$

Sous le bénéfice de ces relations, on obtient

$$\theta_{\sigma\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\\ \mu\end{pmatrix} = \theta_{\sigma'\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}\theta_{\sigma'\tau'}\,\theta_{\sigma\tau'}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau'\\ \sigma\\ \mu''\end{pmatrix}$$

et

(4) $$\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\\ \mu\end{pmatrix} = \theta_{\sigma\tau}\,\theta_{\sigma'\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}\theta_{\sigma'\tau'}\,\theta_{\sigma\tau'}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau'\\ \sigma\\ \mu''\end{pmatrix}.$$

81. On peut donc dire que *le groupe* $\Gamma_{\sigma\tau}$ *contient toutes les matrices que l'expression*

(5) $$\Omega = \theta_{\sigma\tau}\,\theta_{\sigma'\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}\theta_{\sigma'\tau'}\,\theta_{\sigma\tau'}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau'\\ \sigma\\ \mu''\end{pmatrix}$$

fournit, quand les indices σ', τ', μ', μ'' *prennent toutes les valeurs possibles dans* G. Il existe ainsi une dépendance mutuelle entre les groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$, $\Gamma_{\sigma'\tau}$, $\Gamma_{\sigma\tau'}$.

Rien ne permet d'affirmer qu'en général l'expression Ω fournit toutes les matrices de $\Gamma_{\sigma\tau}$, c'est-à-dire le groupe $\Gamma_{\sigma\tau}$ tout entier.

Les $\Gamma_{\sigma\tau}$ sont, en général, d'ordre infini. Pour approfondir la matière, il faudrait recourir à la théorie des *ensembles*, ce qui nous entraînerait trop loin.

Dans le présent travail, je me borne à examiner un cas particulier, assez étendu du reste.

82. J'admettrai que *dans chaque groupe* $\Gamma_{\sigma\tau}$ les matrices a

se disposent deux à deux comme inverses l'une de l'autre. Avec a figurent a^{-1} et $e_r = r$-aire unité $= aa^{-1}$.

Alors, si $\Gamma_{\sigma\tau}$ contient à la fois a et $f = ab$ ou $d = ba$, $\Gamma_{\sigma\tau}$ contiendra aussi

$$b = a^{-1}f \qquad \text{ou} \qquad b = da^{-1}.$$

Cela permet de tirer, de la relation (4) ci-dessus, diverses conséquences.

Dans chaque $\Gamma_{\sigma\tau}$, on affectera, pour e_r, à l'indice μ la valeur zéro :

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = e_r.$$

De plus, comme $u_0 = v_0 = 0$, on a

$$\theta_{\sigma 0} = \theta_{0\tau} = e_r.$$

83. I. *La r-aire $\theta_{\sigma\tau}$ figure dans le groupe $\Gamma_{\sigma\tau}$.*

Faisons dans (4)

$$\mu' = \mu'' = \sigma' = \tau' = 0.$$

On a

$$\theta_{\sigma'\tau} = \theta_{\sigma'\tau'} = \theta_{\sigma\tau'} = e_r,$$

$$a\begin{pmatrix} \tau \\ \sigma' \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \tau' \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = e_r.$$

Ω se réduit à $\theta_{\sigma\tau}$, laquelle figure dans $\Gamma_{\sigma\tau}$ (81).

II. *Chaque matrice $\theta_{\sigma\tau}$ figure dans chacun des groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$.*

Faisons dans (4) $\mu' = \mu'' = \sigma' = 0$. Ω se réduit à la matrice $\theta_{\sigma\tau}\theta_{\sigma\tau'}^{-1}$, laquelle figure dans $\Gamma_{\sigma\tau}$. $\theta_{\sigma\tau'}$ y figure aussi, pour τ' quelconque, comme (n° 82) $\theta_{\sigma\tau'}^{-1}$ et $\theta_{\sigma\tau}$.

Faisons dans (4)

$$\mu' = \mu'' = \tau' = 0.$$

Ω se réduit à $\theta_{\sigma\tau}\theta_{\sigma'\tau}^{-1}$. $\Gamma_{\sigma\tau}$ contient donc $\theta_{\sigma'\tau}$, pour σ' quelconque.

Faisons enfin $\mu' = \mu'' = 0$. Ω se réduit à

$$\theta_{\sigma\tau}\theta_{\sigma'\tau}\theta_{\sigma'\tau'}\theta_{\sigma\tau'}^{-1},$$

laquelle figure dans $\Gamma_{\sigma\tau}$, ainsi que les autres θ, excepté $\theta_{\sigma'\tau'}$. Donc $\theta_{\sigma'\tau'}$ figure aussi dans $\Gamma_{\sigma\tau}$, pour tout choix des indices σ' et τ'. C. Q. F. D.

III. *Les groupes* $\Gamma_{\sigma\tau}$ *sont tous identiques.*

Dans (4) faisons $\mu'' = 0$. Ω devient

$$\theta_{\sigma\tau}\theta_{\sigma'\tau}^{-1}\,\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}\theta_{\sigma'\tau'}\theta_{\sigma\tau'}^{-1}.$$

Par suite, $\Gamma_{\sigma\tau}$ contient la r-aire

$$\mathrm{a}\begin{pmatrix}\tau\\ \sigma'\\ \mu'\end{pmatrix}$$

quelconque dans $\Gamma_{\sigma'\tau}$. On verrait de même que $\Gamma_{\sigma'\tau}$ contient toutes les matrices de $\Gamma_{\sigma\tau}$. *Les groupes* $\Gamma_{\sigma\tau}$ *et* $\Gamma_{\sigma'\tau}$ *coïncident.*

Faisons dans (4) $\mu' = 0$. On verrait de même que les groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$ et $\Gamma_{\sigma\tau'}$ coïncident.

$\Gamma_{\sigma\tau}$ ne change donc pas, quand on modifie soit le premier, soit le second indice, et tous les $\Gamma_{\sigma\tau}$ sont identiques.

84. En résumé, *tous les groupes* $\Gamma_{\sigma\tau}$ *sont identiques à un groupe unique* Γ, *lequel contient toutes les* $\theta_{\sigma\tau}$.

Toute matrice $\mathrm{a}_{\sigma\tau\mu}$ est donc une certaine a_λ

$$\{\lambda = 0, 1, \ldots; \; a_0 = e_r\},$$

si l'on désigne par a_λ les matrices de Γ. La matrice

$$a_{\sigma\tau\mu} = \theta_{\sigma\tau}^{-1}\,\mathrm{a}_{\sigma\tau\mu}$$

est aussi une certaine a_λ, puisque $\theta_{\sigma\tau}$ figure dans Γ.

Tout cela mène à une proposition importante :

THÉORÈME. — *Sous le bénéfice des stipulations du n° 82, le groupe* G, *de rang fixe r, a toutes ses matrices fournies par la formule*

$$(a_\lambda, u_\sigma, v_\tau) = \begin{pmatrix} a_\lambda & a_\lambda u_\sigma \\ v_\tau a_\lambda & v_\tau a_\lambda u_\sigma \end{pmatrix}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots; \sigma, \tau = 0, 1, \ldots),$$

où les r-aires a_λ engendrent un groupe ordinaire Γ, *lequel contient aussi toutes les matrices*

$$\theta_{\sigma\tau} = e_r + u_\sigma v_\tau.$$

Les tableaux u_σ, $(r, n-r)$-aire, et v_τ, $(n-r, r)$-aire, ne sont assujettis qu'à cette condition.

85. Supposons en particulier que G soit d'ordre fini. Il en sera évidemment de même pour chacun des groupes $\Gamma_{\sigma\tau}$. Les stipulations du n° 82 sont satisfaites et l'on a la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Tout groupe* G, *à rang fixe r, d'ordre fini $\Omega = \omega pq$, a ses ωpq matrices fournies par la formule*

$$(a_\lambda, u_\sigma, v_\tau)\,(\lambda = 0, 1, \ldots, \omega - 1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, p-1;\ \tau = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Les ω matrices a_λ engendrent un groupe, qui contient les pq matrices

$$\theta_{\sigma\tau} = e_r + u_\sigma v_\tau.$$

De plus,

$$a_0 = e_r, \qquad u_0 = v_0 = 0.$$

86. Si les pq expressions $u_\sigma v_\tau$ s'évanouissent, $\theta_{\sigma\tau} = e_r$. Alors, si l'on pose, comme toujours,

$$C = BA, \qquad A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}), \qquad \ldots,$$

il viendra $c = ba$. G est isomorphe au groupe r-aire Γ des a_λ. A une a_λ donnée correspondent pq matrices de G.

Du reste, cela est encore vrai dans le cas général où toutes les $u_\sigma v_\tau = 0$, mais où G n'est plus d'ordre fini. G est isomorphe au groupe r-aire des matrices a,

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}).$$

87. Quand les stipulations du n° 82 ont lieu, on peut signaler une autre conséquence, en corrélation avec le n° 69.

Admettons que le groupe G, qui vient d'être construit (théorème du n° 84), figure, comme noyau, dans un groupe plus vaste $\mathfrak{G}$. Prenons dans $\mathfrak{G}$, en dehors du noyau, une matrice A qu'on décomposera en $A = \mathcal{A} + P$, comme il est dit au n° 36 :

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}), \qquad P = (0, 0, 0, a_{22}), \qquad \mathcal{A} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}).$$

G contient la matrice

$$U = (e_r, 0, 0)$$

et la matrice

$$UAU = (a, 0, 0).$$

Donc a figure parmi les r-aires du groupe Γ (n° 84). On a déjà vu, au n° 68, que α_{12} est un certain u_σ et α_{21} un certain v_τ. Par suite, la matrice $\mathcal{A}$ a son α_{12}, son α_{21}, sa r-aire a empruntés à la formule du n° 84.

Par conséquent, *la matrice $\mathcal{A}$ appartient au noyau.* Ou encore : *toute matrice de $\mathfrak{G}$, étrangère au noyau, s'obtient en ajoutant à une certaine matrice du noyau la matrice*

$$(0, 0, 0, a_{22}).$$

88. Il est évident qu'on obtiendra, en s'imposant *a priori* telle ou telle sujétion, beaucoup d'autres groupes G intéressants.

CHAPITRE VIII.

PERMUTABILITÉ.

89. Le problème général relatif à la construction des groupes $\mathfrak{G}$, pourvus d'un noyau G, à rang r, $r > 0$, est assez vaste. Je ne l'entreprendrai pas pour le moment.

On terminera le présent travail en traitant quelques cas particuliers. On les obtient en imposant à $\mathfrak{G}$ certaines sujétions *a priori*.

90. Soient A et B deux n-aires, avec $|A| \neq 0$. La n-aire C définie par

$$C = A^{-1}BA$$

ou

$$(1) \qquad AC = BA$$

est, comme on sait, la *transformée* de B par A.

La relation (1) peut servir encore à définir la transformée C, même si $|A| = 0$.

Seulement alors C pourra manquer ou n'être pas unique. C'est ce dont on s'assurera par les procédés exposés au Chapitre I.

91. On dira qu'un groupe H est *permutable à une matrice* A, dans le cas suivant : B étant prise à volonté dans H, H contient au moins une matrice C, telle que $AC = BA$.

Le groupe H sera *permutable à lui-même,* s'il est permutable à chacune de ses matrices.

92. Cherchons les groupes $\mathfrak{G}$, à noyau G, qui soient permutables à eux-mêmes.

Je dis qu'*un pareil groupe $\mathfrak{G}$ est réductible.*

Prenons à volonté dans le noyau

$$B = (b, \beta_{12}, \beta_{21})$$

et A qu'on peut supposer toujours typique $A = (a, o, o)$. Alors, en toute hypothèse,

$$C = (c, \gamma_{12}, \gamma_{21}, c_{22}),$$
$$AC = (ac, \gamma_{12}, o) = BA = (ba, o, \beta_{21}).$$

Identifiant,

$$ac = ba, \qquad \gamma_{12} = \beta_{21} = o.$$

Mais B est quelconque dans le noyau. L'expression générale des matrices du noyau est

$$(b, \beta_{12}, o);$$

elles ont toutes pour D la même droite D_0, ou $z = o$ (n° 31). Prenons, dans $\mathfrak{G}$, hors du noyau, la matrice

$$F = (f, \varphi_{12}, \varphi_{21}, f_{22}) = \mathfrak{F} + Q,$$
$$\mathfrak{F} = (f, \varphi_{12}, \varphi_{21}), \qquad Q = (o, o, o, f_{22}).$$

La droite $D[\mathfrak{F}]$ appartient (n° 68) aussi à une certaine matrice du noyau. Donc $D[\mathfrak{F}] = D_0$ et $\varphi_{21} = o$. L'expression générale des matrices de $\mathfrak{G}$, situées ou non dans G, est

$$\begin{pmatrix} f & f\varphi_{12} \\ o & f_{22} \end{pmatrix}$$

et $\mathfrak{G}$ est réductible.

C. Q. F. D.

93. Nous allons maintenant étudier les groupes $\mathfrak{G}$, où le noyau G, sans être permutable à lui-même, est permutable à toute matrice de $\mathfrak{G}$, extérieure à G.

Soient, avec nos notations habituelles,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22})$$
$$\qquad r \quad n-r$$

une matrice prise à volonté dans $\mathfrak{G}$ en dehors de G;

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = (b, \beta_{12}, \beta_{21})$$

une matrice prise à volonté dans G.

Il y aura par hypothèse, dans G, au moins une matrice

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = (c, \gamma_{12}, \gamma_{21})$$

telle que $AC = BA$.

94. Formons et identifions les deux produits AC et BA. Il viendra

$$\begin{aligned} A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} &= a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c \\ &= B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a = h, \\ &\qquad |h| \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} &= a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c\gamma_{12} \\ &= B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ &= b\beta_{12}a_{22} + b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a\alpha_{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}C_{11} + A_{22}C_{21} &= a_{22}\gamma_{21}c + \alpha_{21}a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c \\ &= B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} \\ &= \beta_{21}b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}C_{12} + A_{22}C_{22} &= a_{22}\gamma_{21}c\gamma_{12} + \alpha_{21}a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c\gamma_{12} \\ &= B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \\ &= \beta_{21}b\beta_{12}a_{22} + \beta_{21}b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a\alpha_{12}. \end{aligned}$$

Parmi ces relations, la dernière est une conséquence des

précédentes. Il reste simplement

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} h = a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c = b(e_r + \beta_{12}\alpha_{21})a, \\ \gamma_{12} = \alpha_{12} + h^{-1} b\beta_{12} a_{22}, \\ \beta_{21} = \alpha_{21} + a_{22}\gamma_{21} ch^{-1}. \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent être simplifiées par un choix convenable des coordonnées.

95. Puisque B et C figurent toutes deux au noyau, les théories du Chapitre VI nous apprennent que les deux droites

$$t + \beta_{12}[z] = o, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta[B],$$
$$z - \gamma_{21}[t] = o, \quad \text{c'est-à-dire} \quad D[C],$$

ne se rencontrent pas.

Introduisons la collinéation (n° 51) du Chapitre IV

$$\Phi = \begin{pmatrix} e_r & u \\ -v & e_{n-r} \end{pmatrix},$$

les tableaux u et v restant provisoirement indéterminés.

Les droites $\Delta[B]$ et $D[C]$ deviennent respectivement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u + \beta_{12})[z] + (e_r - \beta_{12}v)[t] = o, \\ -(v + \gamma_{21})[t] + (e_{n-r} - \gamma_{21}u)[z] = o. \end{array} \right.$$

Déterminons les deux tableaux u et v par les égalités

$$u = -\beta_{12}, \qquad v = -\gamma_{21};$$

cela est licite, car

$$|e_r + uv| = |e_r + \beta_{12}\gamma_{21}| \neq o,$$

puisque $\Delta[B]$ et $D[C]$ ne se rencontrent pas, et $|\Phi| \neq o$ (n° 52).

Les relations (1) deviennent

$$(e_r + \beta_{12}\gamma_{21})[t] = (e_{n-r} + \gamma_{21}\beta_{12})[z] = o,$$

c'est-à-dire, respectivement,

$$t = o \qquad \text{et} \qquad z = o,$$

puisque

$$|e_r + \beta_{12}\gamma_{21}| \neq 0, \qquad |e_{n-r} + \gamma_{21}\beta_{12}| \neq 0.$$

Si donc nous transformons, comme au Chapitre IV, tout le groupe $\mathfrak{G}$ par la collinéation Φ, qui vient d'être construite, la droite $\Delta[B]$ vient sur Δ_0, c'est-à-dire $t = 0$, et la droite $D[C]$ vient sur D_0, c'est-à-dire $z = 0$.

Autrement dit, il est licite, par un changement convenable de coordonnées, de faire, dans les formules (o) du n° 94,

$$\beta_{12} = \gamma_{21} = 0,$$

et il reste

$$(2) \qquad ac = ba, \qquad \gamma_{12} = \alpha_{12}, \qquad \beta_{21} = \alpha_{21}.$$

96. Si l'on écrit, comme au n° 36, $A = \mathcal{A} + P$, d'où $D[\mathcal{A}]$ est définie par le système

$$z - \alpha_{21}[t] = 0,$$

et $\Delta[\mathcal{A}]$ l'est par le système

$$t + \alpha_{12}[z] = 0,$$

les relations

$$\gamma_{12} = \alpha_{12} \qquad \text{et} \qquad \beta_{21} = \alpha_{21}$$

expriment simplement que

$$\Delta[C] = \Delta[\mathcal{A}], \qquad D[B] = D[\mathcal{A}].$$

Or (n° 40) $\Delta[A]$ est située sur $\Delta[\mathcal{A}]$ et $D[A]$ contient $D[\mathcal{A}]$. Bref :

$D[B]$ est située sur $D[A]$,
$\Delta[C]$ contient $\Delta[A]$.

Ces résultats sont évidemment projectifs et subsistent, quand on revient aux coordonnées générales primitives, c'est-à-dire des formules (2) du n° 95 aux formules (o) du n° 94.

97. On a vu au n° 35 que $D[A]$ est définie par le système

$$U\big[z - \alpha_{21}[t]\big] = 0,$$

où U est un tableau $(n-r-\varpi, n-r)$-aire, assujetti uniquement à ce que, dans un espace $\mathfrak{E}_{n-r}$, $D[a_{22}]$ coïncide avec $\Delta[U]$, d'où (théorème du n° 11)

$$Ua_{22}=0.$$

$D[B]$ est définie par le système

$$z-\beta_{21}[t]=0;$$

comme $D[B]$ est sur $D[A]$, on a

$$U\left[\beta_{21}[t]-\alpha_{21}[t]\right]\equiv 0,$$

c'est-à-dire

(3) $$U\beta_{21}=U\alpha_{21}.$$

On a vu au Chapitre V que les droites D, qui figurent aux matrices du noyau, sont données par les formules

$$z-v_\tau[t]=0 \qquad (\tau=0, 1, 2, \ldots), \qquad v_0=0.$$

β_{21} et α_{21} sont des v_τ choisies à volonté, et, en vertu de l'égalité (3), on a pour tout choix d'indices τ et τ',

(4) $$U_\tau v_\tau=U_\tau v_{\tau'},$$

affectant l'indice τ à A et α_{21} et l'indice τ' à B et β_{21}. L'indice τ' est quelconque, mais l'indice τ ne peut être choisi que parmi ceux qui appartiennent aux matrices A extérieures au noyau.

Faisons, en particulier, $\tau'=0$, $v_0=0$; alors (4) donne $U_\tau v_\tau=0$; pour tout choix de τ',

$$U_\tau v_{\tau'}=0.$$

De là (théorème du n° 11), on voit que $D[v_{\tau'}]$ est située sur $\Delta[U_\tau]$, c'est-à-dire (n° 35) sur $D[a_{22}]$.

Désignons par w_ρ $(\rho=0, 1, \ldots)$ les différentes a_{22} qui figurent dans $\mathfrak{G}$ et par v_τ les différentes v qui figurent dans G.

(4) montre que, pour tout choix des indices ρ et τ, $D[v_\tau]$ est située sur $D[w_\rho]$.

98. Nommons, dans un espace $\mathfrak{E}_{n-r}$, $\mathfrak{K}$, de classe k et de degré $n-r-k$, la droite commune aux diverses droites $D[w_\rho]$. Prenons une matrice $(n-r)$-aire K assujettie uniquement à ce que

$$\mathfrak{K} = D[K].$$

Chaque droite $D[w_\rho]$ contient $\mathfrak{K}$; donc (théorème du nº 14)

$$(5) \qquad K = w_\rho p_\rho, \qquad p_\rho = \text{matrice } (n-r)\text{-aire}.$$

Chacune des droites $D[v_\tau]$ est contenue dans chacune des droites $D[w_\rho]$ et située par suite sur $\mathfrak{K} = D[K]$. Encore, par le théorème du nº 14,

$$(6) \qquad v_\tau = K q_\tau, \qquad q_\tau = \text{tableau } (n-r, r)\text{-aire},$$

ou, eu égard à la formule (5)

$$v_\tau = w_\rho p_\rho q_\tau.$$

99. Prenons maintenant à volonté dans $\mathfrak{G}$ et en dehors du noyau G deux matrices A et B et leur produit $C = BA$. Les formules (o) du nº 44 fournissent notamment

$$\gamma_{21} = \beta_{21} + b_{22}\alpha_{21}(b\theta)^{-1}.$$

β_{21} et γ_{21} sont des v_τ et sont de la forme K.... Donc la droite de l'espace $\mathfrak{E}_{n-r}$

$$D[b_{22}\alpha_{21}(b\theta)^{-1}] = D[b_{22}\alpha_{21}] = D[\gamma_{21} - \beta_{21}]$$

est contenue dans la droite $\mathfrak{K} = D[K]$. Il vient encore

$$b_{22}\alpha_{21} = K\ldots;$$

b_{22} est une certaine w_ρ, d'ailleurs choisie à volonté; α_{21} est un certain v_τ choisi aussi à volonté, et, pour tout choix d'indices ρ et τ,

$$(7) \qquad w_\rho v_\tau = K h_{\rho\tau}, \qquad h_{\rho\tau} = \text{tableau } (n-r, r)\text{-aire}.$$

100. Reprenons les variables t et z du nº 31. L'espace $\mathfrak{E}_{n-r}$,

des droites $D[w_\rho]$, est le lieu du point z, ayant les $z_1, z_2, \ldots, z_{n-r}$ pour coordonnées.

Il est licite (n° 48) de transformer le groupe $\mathfrak{G}$ par la collinéation

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}, \qquad |S| = |S_{11}|\,|S_{22}| \neq 0,$$

c'est-à-dire d'effectuer sur les z la collinéation $(n-r)$-aire arbitraire S_{22}. On disposera de S_{22} de façon que, dans l'espace $\mathfrak{E}_{n-r}$, la droite $\mathfrak{K} = D[K]$ (n° 98) de classe k soit donnée par les équations

$$0 = z_{n-r} = z_{n-r-1} = \ldots = z_{n-r-k+1}.$$

Alors la matrice $(n-r)$-aire K aura ses k dernières lignes nulles, c'est-à-dire composées de zéros. Il en sera de même pour tout tableau de la forme K..., notamment pour les v_τ. Toute matrice B du noyau G,

$$B = (b, \beta_{12}, \beta_{21}) = \begin{pmatrix} b & b\beta_{12} \\ \beta_{21} b & \beta_{21} b \beta_{12} \end{pmatrix}$$

aura ses k dernières lignes nulles, car β_{21} est un v_τ et $\beta_{21} b$ ou $\beta_{21} b$, β_{12} sont de la forme K....

On écrira pour exprimer cette propriété

$$v_\tau = \begin{pmatrix} u_\tau \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} n-r-k \\ k \end{matrix}.$$
$$\qquad r$$

La relation (7) du n° 99, pour

$$w_\rho = \begin{pmatrix} w_{\rho 11} & w_{\rho 12} \\ w_{\rho 21} & w_{\rho 22} \end{pmatrix} \begin{matrix} n-k-r \\ k \end{matrix},$$
$$\qquad n-k-r \quad k$$

donne

$$K\ldots = w_\rho v_\tau = \begin{pmatrix} w_{\rho 11} u_\tau & 0 \\ w_{\rho 21} u_\tau & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(8) \qquad w_{\rho 21} u_\tau = 0.$$

101. Prenons enfin à volonté dans $\mathfrak{G}$, en dehors du noyau, la matrice

$$A = (\ldots, \ldots, v_\tau, w_\rho).$$

On pourra écrire

$$A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ u_\tau & \ldots & \ldots \\ 0 & w_{\rho 21} & \ldots \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-k-r. \\ k \end{matrix}$$
$$\quad r \quad n-k-r \quad k$$

102. Nous sommes maintenant à même de formuler un théorème qui résume la présente discussion depuis le n° 93 :

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{G}$ *un groupe n-naire, lequel admet un noyau* G *de rang r. Le noyau est permutable à toute matrice de* $\mathfrak{G}$ *qui lui est extérieure. Alors les matrices de* $\mathfrak{G}$ *peuvent se mettre sous la forme*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r-k \\ k \end{matrix}$$
$$r \quad n-r-k \quad k$$

$$|A_{11}| \neq 0, \qquad A_{31} = 0.$$

Les relations $A_{32} = A_{33} = 0$ *donnent le noyau.*

Montrons qu'on a effectivement ainsi un groupe.

Soient, en effet, dans $\mathfrak{G}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots \\ \ldots & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} C_{11} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Il viendra

$$C_{31} = B_{31}A_{11} + B_{32}A_{21} + B_{33}A_{31} = B_{32}A_{21},$$

puisque

$$A_{31} = B_{31} = 0.$$

Mais (n° 101)

$$B_{32} = w_{\rho 21}, \qquad A_{21} = u_{\tau'},$$
$$B_{32}A_{21} = w_{\rho 21} u_{\tau'} = C_{31} = 0$$

en vertu de la relation (8).

Il va sans dire que les $A_{11}, \ldots, A_{33}$ sont encore assujetties à d'autres relations qui proviennent de leur origine, car

$$A = (a, \alpha_{12}, \alpha_{21}, a_{22}) = (\ldots, \ldots, v_\tau, w_\rho), \qquad \ldots.$$

103. Je ne poursuivrai pas davantage la construction effective du groupe $\mathfrak{G}$. Il semble, en effet, difficile de le faire sans introduire de nouvelles hypothèses, qui restreignent la généralité soit de $\mathfrak{G}$, soit du noyau G. Je terminerai donc le présent travail par quelques brèves remarques.

104. Reprenons les formules (o) du n° 94. Dans quelles mesures définissent-elles la transformée (n° 90) C de B par A?

A et B étant choisies, h doit être supposée connue. La relation

$$\gamma_{12} = \alpha_{12} + h^{-1} b \beta_{12} a_{22}$$

donne sans ambiguïté le groupe g_σ (n° 72) de G, où figure C. Pour déterminer les deux tableaux inconnus c, matrice r-aire, et γ_{21}, qui est $(n - r, r)$-aire, on a les deux relations

$$h = a(e_r + \alpha_{12}\gamma_{21})c, \qquad (\beta_{21} - \alpha_{21})h = a_{22}\gamma_2 c,$$

lesquelles admettent un nombre illimité de solutions (au moins une par hypothèse).

Il y a là un assez vaste champ de recherches suivant des propriétés qu'on peut attribuer *a priori* à C.

Par exemple, on admettra, par hypothèse, que, pour A et B données, C est unique et bien déterminée, ou bien encore que, pour A et C données, B est unique et bien déterminée.

. . . .

105. Comme (n° 96) la droite D[A] contient la droite D[B],

tandis que $\Delta[C]$ contient $\Delta[A]$, les théorèmes des nos 14 et 15 montrent que

$$B = AL, \qquad C = MA,$$
$$L, M = \text{matrice } n\text{-aire}.$$

La relation $AC = BA$ prend la forme plus symétrique

$$AMA = ALA \qquad \text{ou} \qquad A(L - M)A = 0.$$

Désignons par

$$A_l \qquad (l = 0, 1, \ldots)$$

les différentes matrices de $\mathfrak{G}$ extérieures au noyau, et par

$$B_m \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

les différentes matrices du noyau. On aura, pour tout choix des indices l et m,

$$B_m = A_l \ldots.$$

Soit dans l'espace $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{h}$, de classe g, la droite intersection des diverses $D[A_l]$. Formons une matrice n-aire H, telle que

$$\mathfrak{h} = D[H];$$

on aura évidemment

$$H = A_l p_l, \qquad B_m = H q_m$$
$$(p_l, q_m = \text{matrice } n\text{-aire}).$$

On relierait facilement la présente théorie à la discussion des nos 97 à 99 (1).

(1) Achevant de corriger les épreuves (février 1909), je reçois de M. Arthur Ranum un travail (V, *Index*) qui a quelques points de contact avec le présent Mémoire. M. Ranum étudie aussi les groupes G_r, à rang fixe r, formés de matrices A singulières (ou non invertibles). Il donne (mon n° 66; ma Note des *Comptes rendus* du 5 novembre 1906) les conditions auxquelles satisfait une A, mais aussitôt il passe aux matrices B, qui, sans appartenir à G_r, ont une de leurs puissances contenue dans G_r. Ce dernier problème, d'ailleurs fort intéressant, est tout à fait en dehors de mes présentes recherches.

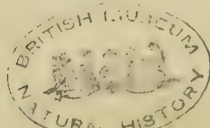


TABLE DES MATIÈRES.

41820 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



Notes critiques sur quelques Traductions allemandes de poèmes français au moyen âge, par J. Firmery, professeur de Littérature étrangère à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 8)* . . . . 5 fr.

Au musée de l'Acropole d'Athènes. — ***Études sur la sculpture en Attique avant la ruine de l'Acropole lors de l'invasion de Xerxès***, par Henri Lechat, ancien membre de l'Ecole d'Athènes, chargé de cours à l'Université de Lyon, avec 47 figures dans le texte et 3 planches hors texte (II, *Fasc. 10)*. (Epuisé) . . . . 8 fr.

Cultes militaires de Rome. Les Enseignes, par Ch. Renel, professeur adjoint à la Faculté des Lettres de Lyon, avec 61 gravures dans le texte. (II, *Fasc. 12)* . . . . 7 fr. 50

Sophocle. — Etude sur les ressorts dramatiques de son théâtre et la composition de ses tragédies, par F. Allègre, professeur à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 15)*. . . . . 8 fr.

Ernest LEROUX, 28, rue Bonaparte.

Phonétique historique et comparée du sanscrit et du zend, par P. Regnaud, professeur à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 19)* . . . . 5 fr.

L'évolution d'un Mythe. Açvins et Dioscures, par Charles Renel, maître de conférences à la Faculté des Lettres de Besançon *(Fasc. 24)* . . 6 fr.

Études védiques et post-védiques, par Paul Regnaud, professeur de sanscrit et de grammaire comparée à l'Université de Lyon. *(Fasc. 38)*. . 7 fr. 50

Bhāratīya-Nātya-Çāstram, Traité de Bharata sur le théâtre, texte sanscrit, avec les variantes tirées de quatre manuscrits, une table analytique et des notes par Joanny Grosset, ancien boursier d'études près la Faculté des Lettres. *(Fasc. 40)*. 15 fr.

Recherches sur l'Origine de l'Idée de Dieu, d'après le Rig-Véda, par A. Guérinot, docteur ès lettres. (II, *Fasc. 3)* . . . . 7 fr. 50

Dictionnaire étymologique du latin, et du grec dans ses rapports avec le latin. d'après la méthode évolutionniste (Linguistique indo-européenne appliquée), par Paul Regnaud, professeur de Sanscrit et de Grammaire comparée à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 19)* . . . . 10 fr.

GAUTHIER-VILLARS, 55, quai Gds-Augustins.

Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, chargé de cours à la Faculté des Sciences. *(Fasc 6)* 9 fr.

Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages, par F. Gonnessiat, aide-Astronome à l'Observatoire, chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 7)* . . . . 5 fr.

Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène, par Etienne Barral, prof. agrégé à la Faculté de médecine. *(Fasc. 17)* 5 fr.

Sur la représentation des courbes gauches algébriques, par L. Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 20)* . . . . . . 3 fr.

Sur le résidu électrique des condensateurs, par L. Houllevigue, maître de confér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 32)*. . . . . . . 3 fr.

Synthèse d'aldéhydes et d'acétones dans la série du naphtalène au moyen du chlorure d'aluminium, par L. Rousset, docteur ès sciences, chef des trav. de chimie génér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 30)* . . . . 3 fr.

Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électro-chimiques, par H. Rigollot, docteur ès sciences, chef des travaux de physique à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 29)*. . . 5 fr

De la constitution des alcaloïdes végétaux, par X. Causse, docteur ès sciences, chef des Travaux de Chimie organique à la Faculté de Médecine de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 2)* . . 3 fr.

Etude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune, avec un catalogue normal des pléiades, par Joanny Lagrula, docteur ès sciences, préparateur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon. (I, *Fasc. 5)* . . . . 5 fr.

Sur les combinaisons organomagnésiennes mixtes et leur application à des synthèses d'acides, d'alcools et d'hydrocarbures, par Victor Grignard, docteur ès sciences. (I, *Fasc. 6)* . . 3 fr. 50

Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversions, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 12)* . . . . . . 6 fr.

Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus, par Le Vavasseur, maître de conférences de mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 15)* . . . . 5 fr.

Sur les Formes mixtes, par Léon Autonne, Ingénieur des Ponts et chaussées, Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 16)*. . 8 fr.

Recherches expérimentales sur les contacts liquides, par A.-M. Chanoz, docteur ès sciences physiques, docteur en médecine, ex-préparateur de Physique à la Faculté des Sciences de Lyon, chef des Travaux de Physique à la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Lyon (I, *Fasc. 18)*. . . . 5 fr.

Quelques démonstrations relatives à la théorie des nombres entiers complexes cubiques. — Propriétés de groupes d'ordre fini, par Raymond Le Vavasseur, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon (I. *Fasc. 21)*. 3 fr.

Sur les Groupes de matrices linéaires non invertibles, par Léon Autonne, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Professeur-adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. (I. *Fasc. 25)* . . . . 5 fr.

J.-B BAILLIÈRE et Fils, 19, rue Hautefeuille.

Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures, par E. Bataillon, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon, avec 6 pl. hors texte. *(Fasc. 2)* . . . . 4 fr.

Anatomie et Physiologie comparées de la Pholade dactyle. Structure, locomotion, tact, olfaction, gustation, action dermatoptique, photogénie, avec une théorie générale des sensations, par le Dr Raphaël Dubois, professeur à la Faculté des Sciences, 68 fig. dans le texte et 15 pl. hors texte. *(Fasc. 3)* . . . . 18 fr.

Sur le pneumogastrique des oiseaux, par E. Couvreur, docteur ès sciences, chef des travaux de physiologie à la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte et 40 fig. dans le texte *(Fasc. 4)*. 4 fr.

Recherches sur la valeur morphologique des appendices superstaminaux de la fleur des Aristoloches, par Mlle A. Mayoux, élève de la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte. *(Fasc. 5)*. 4 fr.

Etude stratigraphique sur le Jurassique inférieur du Jura méridional, par Attale Riche, docteur ès sciences, chef des travaux de géologie, 2 pl. hors texte *(Fasc. 10)*. . . . . 12 fr.

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur Arloing, M. le Dr Rodet, agrégé, et M. le Dr Courmont, agrégé, avec 4 planches en couleurs. *(Fasc. 11)*. 10 fr.

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planches hors texte. *(Fasc. 12)* . . . . 4 fr.

Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 planches hors texte. *(Fasc. 13)* . . . . 3 fr.

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 planches hors texte et 8 figures dans le texte. *(Fasc. 16)* . . . . 10 fr.

Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparat. de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 fig. et 3 pl. hors texte. (I, *Fasc. 1er)* . 5 fr.

Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVERIE, docteur ès sciences, prépar. de botan. Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gr. dans le texte. (I, *Fasc. 3)*. 7 fr. 50

L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône, *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (I, *Fasc. 4)* . . . . 6 fr.

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M. GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte. *(Fasc. 23)* . . . . 3 fr. 50

Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences. avec 119 figures et 125 planches hors texte, *(Fasc. 25)*. . . . . 15 fr.

Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Lyon, avec 6 planches hors texte et 31 figures. *(Fasc. 27)* . . . . 6 fr.

Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Bordeaux, avec 40 figures dans le texte. *(Fasc. 28)* . . . . . 3 fr. 50

Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KŒHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 26)*.
Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . . . 6 fr.
Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. . . 6 fr.
Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. . . . 20 fr.

Anatomie pathologique du système lymphatique dans la sphère des néoplasmes malins, par le Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. BARJON, préparateur d'anatomie générale et d'histologie à la Faculté de médecine (Mémoire couronné par l'Académie de médecine), avec 4 pl. hors texte. *(Fasc. 33)* . . . . 5 fr.

Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparateur de géologie à la Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 planches hors texte. *(Fasc. 34)*. . . . . . 8 fr.

Étude du champ électrique de l'atmosphère, par Georges LE CADET, docteur ès sciences, assistant à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. dans le texte. *(Fasc. 35)* . . . . 6 fr.

Les Formes épitoques et l'Évolution des Cirratuliens par Maurice CAULLERY, maître de confér. à la Faculté des Sciences, et Félix MESNIL, chef de Laboratoire à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors texte. *(Fasc. 39)*. . . . . 7 fr. 50

Etude géologique et paléontologique du Carbonifère inférieur du Mâconnais, par A. VAFFIER, docteur en médecine et docteur ès sciences, avec 11 figures et 12 planches hors texte. (I, *Fasc. 7)*. . 8 fr.

Contributions à l'Embryologie des Nématodes, par A. CONTE, docteur ès sciences, prépar. de Zoologie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 8)*. 5 fr.

Contributions à l'étude des larves et des métamorphoses des diptères, par C. VANEY, docteur ès sciences, agrégé des sciences naturelles, chef des travaux de Zoologie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 9)* . . . . 6 fr.

Contribution à l'étude de la classe des Nymphéinées, par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences naturelles, licencié ès sciences physiques, chef des Travaux de Botanique à la Faculté des sciences, sous-directeur du Jardin botanique de la Ville, 214 figures dans le texte. (I, *Fasc. 10)*. 7 fr. 50

Monographie géologique et paléontologique des Corbières orientales, par Louis DONCIEUX, docteur ès sciences, Collaborateur auxiliaire au service de la carte géologique de France, avec 69 figures dans le texte, 7 planches hors texte et une carte géologique. (I, *Fasc. 11)* . . . . . . 8 fr.

Contribution à l'étude des composés diazoamidés, par Louis MEUNIER, docteur ès sciences, chef des travaux de chimie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 13)* . . . . 5 fr

Etude stratigraphique et paléontologique sur la Zone à Lioceras concavum du Mont d'Or lyonnais, par Attale RICHE, docteur ès sciences, chargé d'un cours complémentaire de Géologie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon, avec 7 figures dans le texte et 11 planches hors texte (I, *Fasc. 14)* . . . . 7 fr. 50

Catalogue descriptif des Fossiles nummulitiques de l'Aude et de l'Hérault — PREMIÈRE PARTIE **Montagne Noire et Minervois**, par Louis DONCIEUX docteur ès sciences, préparateur-adjoint au Laboratoire de géologie de la Faculté des sciences de Lyon ; en collaboration avec MM. J. MIQUEL et J. LAMBERT, avec 3 figures dans le texte et 5 planches hors texte (I, *Fasc. 17)* . . 6 fr

DEUXIÈME PARTIE (fasc. I) **Corbières septentrionales**, par Louis DONCIEUX, docteur ès Sciences préparateur-adjoint au Laboratoire de Geologie de la Faculté des Sciences de Lyon ; en collaboratio avec M. Maurice LERICHE, maître de Conférence de Géologie à l'Université de Lille, avec 1 fig dans le texte et 13 planches hors texte. I, *Fasc 22)*. . . . . 7 fr. 5

Minéralogie des départements du Rhône et de la Loire par Ferdinand GONNARD, ingénieur des Arts e Manufactures, avec 31 figures intercalées dan le texte. (I, *Fascicule 19)*. . . . . . 4 f

Recherches sur l'anatomie comparée et le développement des Ixodidés, par Amédée BONNET, docteu ès sciences, préparateur de zoologie à la Facult des Sciences de l'Université de Lyon, avec 10 figures dans le texte et 6 planches hors text (I, *Fasc. 20)* . . . . 8 f

Les Oiseaux des phosphorites du Quercy, par C GAILLARD, docteur es sciences, chef des travau au Muséum de Lyon, avec 37 figures dans le tex et 8 planches hors texte (I, *Fasc. 23)* . . 6 f

Etude des Mammifères miocènes des Sables de l'O léanais et des Faluns de la Touraine, par le Dr Lu cien MAYET, ancien interne des Hôpitaux de Lyo docteur en médecine, docteur ès sciences, av 100 figures dans le texte et 12 planches hors tex comprenant 184 figures. (I, *Fasc. 24)* . 10 f

Lyon. — Imprimerie A. REY, 4, rue Gentil — 49106.



